О НѢКОТОРЫХЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ СВОЙСТВАХЪ РЕГУЛЯРНЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Пиншерлэ[1]) доказалъ теорему аналогичную теоремѣ Эйзенштейна, относящуюся къ разложеніямъ регулярныхъ интеграловъ:

$$y=x^r[a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots] \qquad (1)$$

линейныхъ однородныхъ уравненій Фуксовскаго типа:

$$p_0(x)y^{(m)}+p_1(x)y^{(m-1)}+\ldots.p_{m-1}(x)y'+p_m(x)y=0, \qquad (2)$$

т.-е. такихъ, что

$$p_i(x)=x^{m-i}q_i(x), \qquad (3)$$

гдѣ $q_i(x)$ цѣлая функція, $q_0(x)$ не дѣлится на x.

Теорема Пиншерлэ состоитъ въ слѣдующемъ:

I) Въ разложеніи (1), представляющемъ регулярный интегралъ уравненія (2), коэффиціенты алгебраическія числа, принадлежащія къ области раціональностей опредѣляемыхъ Фуксовскимъ уравненіемъ:

$$\begin{gathered}q_0(0)r(r-1)\ldots(r-m+1)+q_1(0)r(r-1)\ldots(r-m+2)+\\+\ldots.q_{m-1}(0)r+q_m(0)=0,\end{gathered} \qquad (4)$$

[1]) *Pincherle.* Sur la nature arithmétique des coéfficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires. Journal de Crelle. B. 101 p. 84.

если только предполагать, что это уравненіе:

1) неприводимо,

2) разность между двумя корнями не представляетъ цѣлаго числа.

II) Приведя коэффиціенты при степеняхъ r въ выраженіи:

$$a_n = \sum_{j=0}^{j=m-1} a^{(j)}{}_n r^j \tag{5}$$

къ простѣйшему виду и обозначая черезъ p_n *наибольшій множитель, входящій въ знаменатель* $a^{(j)}{}_n$, *мы должны имѣть для* $\frac{p_n}{n^{m^2}}$ *съ возрастаніемъ n конечный предѣлъ.*

Въ настоящей статьѣ мы дополняемъ изслѣдованія Пиншерлэ слѣдующимъ образомъ:

1) Продолжаемъ его изслѣдованія на случай, когда указанныя имъ условія для Фуксовскаго уравненія уже не имѣютъ мѣста,

2) Причемъ замѣняемъ уравненіе Фуксовскаго типа уравненіемъ общаго типа, имѣющимъ хотя бы одинъ регулярный интегралъ,

3) Указываемъ въ какихъ случаяхъ $\frac{p_n}{n^q}$ при q меньшемъ m^2 можетъ имѣть конечный предѣлъ и указываемъ при этомъ на интересную зависимость этого числа q отъ чиселъ, характерныхъ для линейнаго дифференціальнаго уравненія;

4) Отмѣчаемъ еще новое ариѳметическое свойство разложенія (1), относящееся къ $\frac{\lambda_n(p)}{n^q}$, гдѣ $\lambda_n(p)$ показатели степени любого множителя p въ знаменателяхъ коэффиціентовъ разложенія (1) и, наконецъ,

5) Изслѣдуемъ ариѳметическія свойства общаго типа регулярныхъ интеграловъ:

$$y = x^r[A_0(x) + A_1(x)\log(x-a) + \dots A_{\alpha-1}(\log(x-a))^{\alpha-1}], \quad (6)$$

гдѣ

$$A_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + \dots \quad (7)$$

§ 2. Взявъ общій типъ линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \dots p_{m-1}(x)y' + p_m(x)y = 0, \quad (8)$$

гдѣ

$$p_i(x) = x^{\rho_i} q_i(x) \quad (9)$$

ρ_i цѣлыя числа, $q_i(x)$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами, разсмотримъ сперва ариѳметическія свойства голоморфнаго разложенія:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (10)$$

Здѣсь возможны при этомъ слѣдующіе случаи:

1) *a_i—алгебраическія величины.*

Тогда онѣ опредѣляются неприводимыми уравненіями степеней σ_i и вида:

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma_i} A^{(j)}_{0i} a^j_i = 0, \quad (11)$$

гдѣ $A^{(j)}_{0i}$ цѣлыя числа

2) *Среди a_i находятся трансцендентныя.*
a_i опредѣляются уравненіями:

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma_i} A^{(j)}_{0i}(\xi_1,\ \xi_2 \dots \xi_q) a^j_i = 0, \quad (12)$$

гдѣ $A^{(j)}_{0i}$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами или, какъ будемъ называть, цѣлыя R—функціи отъ трансцендентныхъ $\xi_1,\ \xi_2 \dots \xi_q$.

3) *Среди a_i находятся произвольныя постоянныя:*

a_i опредѣляются уравненіями типа

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma_i} A^{(j)}{}_{0i}(\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_q,\ C_1,\ C_2, \ldots C_l) a^j{}_i = 0, \tag{13}$$

гдѣ $A^{(j)}{}_{0i}$ опять представляютъ цѣлыя R—функціи отъ ξ_1, ξ_2 $\ldots$ ξ_q, C_1, C_2 $\ldots$ C_l.

Прежде всего замѣтимъ, что, когда рядъ (10) представляетъ интегралъ линейнаго уравненія (8), то *всѣ коэффиціенты разложенія a_i выражаются алгебраически черезъ нѣкоторые изъ числа ихъ: a_1, a_2 $\ldots$ a_l ($l \leqq m$), при чемъ число этихъ послѣднихъ не больше m порядка линейнаго дифференціальнаго уравненія (8).* Эти алгебраическія соотношенія, линейныя, какъ ниже увидимъ, будутъ подробно нами изслѣдованы.

Отсюда вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *Число трансцендентныхъ ξ_i мы можемъ предполагать конечнымъ и меньше m.*

Въ самомъ дѣлѣ, если $q \geqq m$, то между ξ_i должны быть алгебраическія соотношенія, дающія

$$\xi_{p+j}, \qquad j=0,\ 1,\ 2 \ldots q-p$$

въ алгебраическихъ функціяхъ отъ

$$\xi_j, \qquad j=0,\ 1,\ 2 \ldots p.$$

Подставляя значенія ξ_{j+p} черезъ ξ_j въ уравненіе (12) и приводя его къ нормальному виду, получаемъ такое же уравненіе но съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ:

$$\sum_{j=0}^{j=\tau_i} B^{(j)}{}_{0i}(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \xi_p) a^j{}_i = 0.$$

Во всѣхъ нашихъ изслѣдованіяхъ будемъ предполагать, *что между ξ_i нѣтъ алгебраическихъ соотношеній или, какъ будемъ говорить, выраженія a_i заданы въ приготовленномъ видѣ.*

2) Ясно, что и *число произвольныхъ постоянныхъ ограничено.*

3) Мы можемъ также уравненія (11), (12) и (13), опредѣляющія a_i, замѣнить слѣдующими:

(11) $$a_n = \frac{\sum_{j=0}^{j=\sigma-1} a^{(j)}{}_n t^j}{c_n}, \tag{14}$$

гдѣ t опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \omega^{(j)}{}_{0i} t^j = 0, \tag{15}$$

гдѣ $\omega^{(j)}{}_{0i}$ цѣлыя числа, равно какъ $a^{(j)}{}_n$ и c_n

(12) $$a_n = \frac{\sum_{j=0}^{j=\sigma-1} a^{(j)}{}_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) t^j}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} = \frac{\Omega_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{c_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q)}, \tag{16}$$

гдѣ t опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ:

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \omega^{(j)}{}_{0i}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) t^j = 0, \tag{17}$$

гдѣ $a^{(j)}{}_n$, c_n, $\omega^{(j)}{}_{0i}$ цѣлыя R—функціи.

(13) $$a_n = \frac{\Omega_k(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, c_1, c_2 \ldots c_p, t)}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, c_1, c_2 \ldots c_p)} \tag{18}$$

гдѣ

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \omega^{(j)}{}_{0i}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, c_1, c_2 \ldots c_p) t^j = 0. \tag{19}$$

Эти выраженія мы получимъ, полагая

$$t = \sum_{i=1}^{i=l} A_i a_i, \tag{20}$$

гдѣ A_i цѣлыя числа или цѣлыя R — функціи, причемъ t опредѣляется однимъ изъ уравненій (15), (17), (19) степени $\sigma \leqq \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_l$, а a_i выражаются раціонально въ формѣ (14), (16), (18) черезъ t. Такъ какъ a_n выражаются раціонально черезъ a_i, то для a_n при всякомъ n мы получаемъ выраженія того же типа (14), (16), (18).

§ 3. Разсмотримъ сперва выраженіе

$$a_n = \frac{\sum\limits_{j=0}^{j=\sigma-1} a^{(j)}{}_n t^j}{c_n} \tag{14}$$

$$\omega(t)=0. \tag{15}$$

Въ этомъ выраженіи мы будемъ предполагать произведенными всевозможныя *сокращенія*, т.-е.

$$D\left[\overset{(0)}{\underset{n}{a}}, \quad \overset{(1)}{\underset{n}{a}} \ldots \overset{(\sigma-1)}{\underset{n}{a}}, \quad c_n\right]=1. \tag{21}$$

Легко видѣть, что, если

$$a_n = \frac{\sum\limits_{j=0}^{j=\sigma-1} a^{(j)}{}_{n1} t^j}{c_{n1}}, \tag{14$_1$}$$

гдѣ $\overset{(j)}{\underset{n1}{a}}$, c_{n1} цѣлыя числа, подчиняющіеся условію:

$$D\left[\overset{(0)}{\underset{n1}{a}}, \quad \overset{(1)}{\underset{n1}{a}} \ldots \overset{(\sigma-1)}{\underset{n1}{a}}, \quad c_{n1}\right]=1 \tag{21$_1$}$$

то

$$c_n = \pm c_{n1},$$

ибо неприводимость уравненія (15) предполагаетъ

$$\frac{\overset{(j)}{\underset{n1}{a}}}{c_{n1}} = \frac{\overset{(j)}{\underset{n}{a}}}{c_n} = h_i,$$

т.-е. что c_{n1} и c_n оба наименьшія кратныя знаменателей дробей h_i.

Положимъ, что мы имѣемъ два различныхъ выраженія для a_n:

$$a_n = \frac{\sum_{j=0}^{j=\sigma_1-1} a_{n1}^{(j)} t_1^j}{c_{n1}} \qquad (14_1^{(1)})$$

$$a_n = \frac{\sum_{j=0}^{j=\sigma_2-1} a_{n2}^{(j)} t_2^j}{c_{n2}}, \qquad (14_2^{(1)})$$

гдѣ t_1 и t_2 опредѣляются двумя различными неприводимыми уравненіями степеней σ_1 и σ_2:

$$\omega_1(t_1)=0 \qquad (15_1^{(1)})$$

$$\omega_2(t_2)=0 \qquad (15_2^{(1)})$$

отвѣчающими различнымъ значеніямъ A_i или вообще различнымъ выраженіямъ t черезъ a_i:

$$t_1=\pi_1(a_0,\ a_1 \ldots a_l) \qquad (22_1^{(1)})$$

$$t_2=\pi_2(a_0,\ a_1 \ldots a_l), \qquad (22_2^{(1)})$$

гдѣ π_1 и π_2 раціональныя функціи a_i.

На основаніи уравненій $(14_1^{(1)})$ и $(14_2^{(1)})$ имѣемъ:

$$t_1^k = \frac{\sum_{s=0}^{s=\sigma_1-1} d_{k1}^{(s)} t_2^s}{e_1^{\sigma_1-1}} \qquad (23_1^{(1)})$$

$$t_2^k = \frac{\sum_{s=0}^{s=\sigma_2-1} d_{k2}^{(s)} t_1^s}{e_2^{\sigma_2-1}}, \qquad (23_2^{(1)})$$

гдѣ $d_{k1}^{(s)}$, $d_{k2}^{(s)}$, e_1, e_2 цѣлыя числа.

Отсюда слѣдуетъ, что $\sigma_1 = \sigma_2$.

Подставляя же выраженіе t_1 въ t_2 въ a_n, имѣемъ:

$$a_n = \frac{\sum\limits_{s=0}^{s=\sigma_2-1} a^{(j)}_{n12} t^{(j)}_2}{c_{n1} e_1^{\sigma_1-1}} \tag{24}$$

$$a^{(j)}_{n12} = \sum_{s=0}^{s=\sigma_2-1} d^{(j)}_{s1} a^{(s)}_{n1}. \tag{25}$$

Если c_{n1} имѣетъ съ $a^{(j)}_{n12}$ общій дѣлитель p, то изъ уравненія (25), которое даетъ:

$$\Delta a^{(s)}_{n1} = \sum_{j=0}^{j=\sigma_2-1} \Delta^{(j)}_n a^{(j)}_{n12} \tag{26}$$

и гдѣ опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля, такъ какъ уравненія $(22_2{}^{(1)})$ вполнѣ опредѣляютъ t^s, слѣдуетъ, что p дѣлитъ Δ, такъ какъ $a^{(s)}_{n1}$ для нѣкотораго s не дѣлится на p.

Мы имѣемъ слѣдовательно:

$$gc_{n2} = \pm c_{n1} e_1^{\sigma_1-1}, \tag{27}$$

гдѣ g и $e_1^{\sigma_1-1}$ содержатъ простые множители меньшіе нѣкотораго числа не зависящаго отъ n въ степеняхъ, показатели которыхъ тоже меньше нѣкоторыхъ конечныхъ чиселъ не зависящихъ отъ n.

§ 4. Полученный нами результатъ возможно еще иначе формулировать, вводя слѣдующія опредѣленія.

Всѣ множители c_n мы раздѣляемъ на группы:

I) *Первая группа— множители меньшіе конечнаго числа* P, *не зависящаго отъ n въ степеняхъ, показатели которыхъ меньше конечнаго числа Q, не зависящаго отъ n.*

P, Q мы будемъ распоряжаться сообразно обстоятельствамъ.

Очевидно такихъ множителей можетъ быть только конечное число.

II) *Вторая группа—множители меньшіе P, но съ показателями больше Q.*

Такихъ множителей тоже конечное число.

III) *Третья группа—множители большіе P.*

Теорема Эйзенштейна утверждаетъ, что если

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{10}$$

опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ, то *множителей (III) вовсе нѣтъ.*

Для случая линейныхъ однородныхъ уравненій *множителей (III) можетъ быть безграничное количество,* что можно видѣть на примѣрѣ функціи:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!}+\ldots$$

опредѣляемой линейнымъ уравненіемъ:

$$y''+y=0.$$

Итакъ изъ разсужденій настоящаго параграфа мы видимъ, что *при различныхъ возможныхъ выраженіяхъ типа (14) для a_n группы*[1]) *простыхъ множителей (II) и (III) остаются неизмѣнными, а показатели множителей (II) мѣняются на конечныя числа, показатели же множителей (III) совсѣмъ не мѣняются.*

Изъ второй или третьей группы мы выдѣляемъ наибольшій простой множитель p_n.

По теоремѣ Эйзенштейна *для алгебраическихъ функцій p_n не превосходитъ конечнаго числа P.*

---

[1]) При надлежаще выбранныхъ P, Q, опредѣляющихъ группы.

Теорема Чебышева, о которой упоминаетъ безъ доказательства въ своемъ курсѣ Эрмитъ утверждаетъ, *что, если рядъ (10) выражаетъ функцію, представляемую въ конечномъ видѣ съ помощію элементарныхъ трансцендентныхъ функцій, то* $\frac{p_n}{n}$ *при возрастаніи* n *сохраняетъ конечную величину.*

Гомесъ-Тейксейра [1]) идетъ дальше, доказывая теорему, изъ которой теорема Чебышева вытекала бы какъ простое слѣдствіе, а именно, *что когда рядъ (10) представляетъ интегралъ алгебраическаго дифференціальнаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами;*

$$f(x,\ y,\ y' \dots y^{(m)})=0, \tag{28}$$

то

$$\frac{p_n}{n} \leqq 1.$$

Но теорема Тейксейра невѣрна, такъ какъ, во-первыхъ простой гипергеометрическій рядъ:

$$\begin{gathered} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}\,x^2+ \\ +\dots\dots\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,x^n+\dots \end{gathered} \tag{29}$$

удовлетворяющій уравненію.

$$(x^2-x)y''-[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0 \tag{30}$$

уже противорѣчитъ его результату·

Но кромѣ того и доказательство Тейксейра невѣрно, а именно для случая $m=1$, совсѣмъ умалчивается о томъ, что

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x=0}$$

---

[1]) *Gomes Teixera.* Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation differentielle. Ann. de l'Ecole Normale (3) II (1885 г.).

можетъ равняться нулю, для $m > 1$ утвержденіе, что

$$\left[\frac{\partial^k f}{\partial y^{(m)k}}\right]_{x=0}$$

для нѣкотораго k отлично отъ нуля, невѣрно.

Къ этимъ общимъ изслѣдованіямъ, относящимся къ общему алгебраическому уравненію мы возвратимся въ слѣдующей статьѣ.

Возвращаясь къ случаю линейныхъ уравненій, мы ставимъ задачу:

Найти такое число k, чтобы

$$\frac{p_n}{n^z}$$

для $z \geqq k$ сохраняла при возрастаніи и конечное значеніе.

Условіе $\frac{p_n}{n^k} <$ конечнаго числа, будемъ означать символомъ:

$$P[k],$$

рядъ (10) удовлетворяющій ему символомъ

$$P(k).$$

Теорема Эйзенштейна[1]) утверждаетъ не только конечность p_n, но также еще слѣдующее: *отношеніе*

$$\frac{\lambda_n(p)}{n}$$

показателя степени p въ c_n къ n сохраняетъ при возрастаніи n конечную величину.

---

[1]) *Eisenstein.* Monatsberichte der Akademie zu Berlin vom Juli 1852. s. 441. *Heine.* Kugelfunctionen, а также Crelle B. 45 und B. 48.

Соотвѣтственно этой второй части теоремы Эйзенштейна ставимъ задачу:

Найти такое число l, чтобы

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^z}$$

для $z \geqq l$ сохраняла при возрастаніи n конечное значеніе.

Условіе это обозначаемъ черезъ

$$L[l]$$

рядъ ему удовлетворяющій черезъ

$$L(l).$$

На основаніи доказаннаго выше условіе $L[l]$, имѣя мѣсто для одного выраженія a_n, остается въ силѣ и для другого, такъ какъ $\lambda_n(p)$ мѣняется при переходѣ отъ одного выраженія къ другому на величины меньшія конечнаго числа, независящаго отъ n.

Совокупность условій $L[l]$ и $P[k]$ обозначается символомъ:

$$A[k,\ l],$$

если $k=l$, символомъ

$$A[k],$$

рядъ ему удовлетворяющій черезъ

$$A(k,\ l)$$

или

$$A(k).$$

Обозначая знакомъ равенства то, что изъ одного условія вытекаетъ другое, можемъ написать

$$\begin{array}{ll} P[\ k\ ]=P[\ k'\ ] & k' \geqq k \\ L[\ l\ ]=L[\ l'\ ] & l' \geqq l \\ A[k,\ l]=A[k',\ l'] & k' \geqq k \\ & l' \geqq l \end{array}$$

§ 5. Переходимъ теперь къ обобщенію этихъ результатовъ на случай, когда a_n опредѣляется формулой:

$$a_n = \frac{\sum\limits_{j=0}^{j=\sigma-1} a_n^{(j)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) t^j}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} = \frac{\Omega_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} \tag{16}$$

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \omega^{(j)}{}_{0i}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) t^j = 0. \tag{17}$$

Здѣсь слѣдуетъ остановиться на свойствахъ цѣлыхъ R—функцій, иначе говоря, цѣлыхъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами:

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$$

отъ ξ_i, представляющихъ изъ себя или

1) *q независимыхъ перемѣнныхъ.*

или

2) *q величинъ, между которыми нѣтъ алгебраическихъ зависимостей.*

Подъ дѣленіемъ одной R—функціи F на другую Φ будемъ разумѣть опредѣленіе R—функціи H удовлетворяющей уравненію:

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) = \Phi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) H(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q). \tag{18}$$

Это равенство должно быть тождествомъ относительно ξ_i, ибо, въ противномъ случаѣ, оно устанавливало бы алгебраическія соотношенія между ξ_i, которыхъ не можетъ быть. Поэтому ξ_i слѣдуетъ разсматривать, какъ независимыя перемѣнныя.

Если функція Φ, разсматриваемая относительно одного изъ перемѣнныхъ ξ_i, представляетъ изъ себя *примитивную функцію* $\Phi(\xi_i)$, т.-е. такую, что коэффиціенты ея не разложимы такъ, что содержатъ общій дѣлитель, дѣленіе F на Φ сводится къ алгебраическому дѣленію $F(\xi_i)$ на $\Phi(\xi_i)$, такъ какъ,

какъ ниже покажемъ, по теоремѣ Гаусса такое дѣленіе даетъ цѣлую R—функцію.

Подъ *простыми дѣлителями* $F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$ будемъ разумѣть:

1) *неразложимыя R—функціи*

$$\Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$$

отъ q перемѣнныхъ ξ_i или меньшаго числа:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p) \quad 0 < p \leqq q$$

на которыя разлагается $F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$.

Такіе множители называемъ простыми *R—множителями.*

2) *цѣлыя простыя числа*, на которыя дѣлится $F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$ въ томъ смыслѣ, что

$$F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q) = aH(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q),$$

гдѣ H цѣлая R—функція.

Такіе множители называемъ простыми *числовыми множителями.*

Замѣтимъ, что необходимое и достаточное условіе дѣлимости $F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$ на $\Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_p)(0 < p \leqq q)$ или на цѣлое число a будетъ *дѣлимость всѣхъ коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ* $\xi_{p+1}^{\alpha_1}, \ \xi_{p+2}^{\alpha_2} \dots \xi_q^{\alpha_{q-p}}$.

Свойства R—функцій аналогичны свойствамъ цѣлыхъ чиселъ и цѣлыхъ функцій и выводъ ихъ, какъ послѣднихъ, основанъ на слѣдующей теоремѣ.

Если цѣлая R—функція $\Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$ дѣлитъ произведеніе двухъ цѣлыхъ R—функцій $F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)\Psi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$, причемъ съ $\Psi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_q)$ взаимно проста, то она дѣлитъ $F(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_q)$.

Для доказательства убѣждаемся:

1) что теорема имѣетъ мѣсто для $q=1$,

2) что имѣетъ мѣсто для q перемѣнныхъ: $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q$ въ предположеніи, что она вѣрна при меньшемъ числѣ перемѣнныхъ.

Приступая къ первой части теоремѣ, напомнимъ теорему Гаусса [1]), по которой:

Произведеніе двухъ примитивныхъ цѣлыхъ функцій $A(\xi)$ *и* $B(\xi)$ *даетъ примитивную функцію* $C(\xi)$.

Изъ этой теоремы сейчасъ же вытекаетъ, что *частное отъ дѣленія* [2]) *цѣлой* R*—функціи* $F(\xi)$ *на примитивную* R*—функцію* $C(\xi)$ *представляетъ тоже цѣлую* R*—функцію* $D(\xi)$.

Въ самомъ дѣлѣ пусть

$$\frac{F(\xi)}{C(\xi)}=D(\xi)$$

$$F(\xi)=C(\xi)D(\xi),$$

гдѣ $D(\xi)=\frac{a}{c}E(\xi)$, гдѣ a, c цѣлыя числа, $E(\xi)$ примитивная R—функція. Тогда

$$F(\xi)=\frac{a}{c}C(\xi)E(\xi)=\frac{a}{c}G(\xi),$$

гдѣ $G(\xi)$ по теоремѣ Гаусса примитивная функція. Если $\frac{a}{c}$ несократимая дробь, то для того чтобы $\frac{a}{c}G(\xi)$ представляла цѣлую функцію съ цѣлыми коэффиціентами, необходимо, чтобы каждый коэффиціентъ $G(\xi)$ дѣлился на c, что можетъ быть вслѣдствіе примитивности $G(\xi)$ только при $c=1$.

Итакъ $D(\xi)=aE(\xi)$ имѣетъ всѣ коэффиціенты цѣлые, т.-е. представляетъ цѣлую R—функцію.

---

[1]) *Weber.* Algebra B. I ст. 27. *Gauss.* Disquisitiones arithmeticae. Art. 42.

[2]) Причемъ дѣленіе понимается въ обыкновенномъ алгебраическомъ смыслѣ.

Полагая

$$F(\xi)=fA(\xi)$$

$$\Psi(\xi)=\psi B(\xi)$$

$$\Phi(\xi)=\varphi C(\xi),$$

гдѣ f, ψ, φ цѣлыя числа, $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$ примитивныя R—функціи, будемъ имѣть

$$\frac{F(\xi)\Psi(\xi)}{\Phi(\xi)}=\frac{f\psi}{\varphi}\cdot\frac{A(\xi)B(\xi)}{C(\xi)}$$

$C(\xi)$ алгебраически взаимнопроста съ $B(\xi)$, ибо иначе имѣли бы

$$C(\xi)=D(\xi)E(\xi)$$

$$B(\xi)=D(\xi)G(\xi),$$

гдѣ $D(\xi)$ цѣлая функція, которую можемъ предполагать примитивной R—функціей, и въ послѣднемъ случаѣ $E(\xi)$ и $G(\xi)$ должны быть цѣлыми R—функціями.

Тогда

$$\Psi(\xi)=\psi D(\xi)E(\xi)$$

$$\Phi(\xi)=\varphi D(\xi)G(\xi),$$

т.-е. $\Psi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ имѣютъ общій R—дѣлитель $D(\xi)$ или, противно условію, не взаимнопросты. Слѣдовательно $A(\xi)$ алгебраически дѣлится на $C(\xi)$, т.-е. R—функція $A(\xi)$ на R—функцію $C(\xi)$ по вышедоказанному.

φ число взаимнопростое съ ψ, ибо иначе $\Psi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ имѣли бы общій числовой дѣлитель.

Такъ какъ $\frac{f\psi}{\varphi}H(\xi)$ равно цѣлой R—функціи, гдѣ $H(\xi)=$ $=\frac{A(\xi)B(\xi)}{C(\xi)}$ примитивная R—функція, то $f\psi$ дѣлится на φ, и слѣдовательно f дѣлится на φ. Итакъ единовременно дѣлятся f на φ, $A(\xi)$ на $C(\xi)$, а потому и $F(\xi)$ на $\Phi(\xi)=\varphi C(\xi)$.

Приступая ко второй части доказательства, мы должны прежде всего замѣтить, что въ виду того, что теорема Гаусса основывается только на свойствѣ цѣлыхъ чиселъ, состоящемъ въ томъ, что если Φ взаимнопростое съ Ψ, а $F\Psi$ дѣлится на Φ, то Φ дѣлитъ F, то разъ доказано это свойство для цѣлыхъ R—функцій, при числахъ перемѣнныхъ меньшихъ q, то можетъ считаться доказаннымъ и слѣдующее обобщеніе теоремы Гаусса:

Произведеніе двухъ примитивныхъ относительно ξ_1 *R—функцій* $A(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ *и* $B(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ *равно примитивной R—функціи* $C(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p)$.

А равнымъ образомъ можно принять и ея слѣдствіе:

Частное отъ дѣленія цѣлой R—функціи $F(\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_q)$ *на примитивную R—функцію* $C(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$, *разсматриваемыхъ какъ цѣлыхъ полиномовъ отъ* ξ_1, *представляетъ цѣлую R—функцію* $D(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$.

Теперь, предполагая теорему вѣрной для $p \leqq q-1$ докажемъ ея справедливость для $p=q$.

Мы можемъ положить:

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)=F^{(1)}(\xi_2 \ldots \xi_q)A(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$$

$$\Psi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)=\Psi^{(1)}(\xi_2 \ldots \xi_q)B(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$$

$$\Phi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)=\Phi^{(1)}(\xi_2 \ldots \xi_q)C(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q),$$

гдѣ A, B, C примитивныя R—функціи, $F^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ цѣлыя R—функціи отъ $\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q$.

Какъ выше для $q=1$, убѣждаемся, что $C(\xi_1)$ взаимнопроста съ $B(\xi_1)$ и поэтому $C(\xi_1)$ алгебраически дѣлитъ $A(\xi_1)$, если всѣ эти функціи разсматривать, какъ цѣлыя функціи относительно ξ_1, причемъ дѣленіе $A(\xi_1)$ на $C(\xi_1)$ даетъ примитивную R—функцію, иначе говоря R—функція $A(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ дѣлится на $C(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$. Но легко видѣть, доказавъ эту теорему для меньшаго числа перемѣнныхъ, что $F^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$ дѣлится на $\Phi^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$.

Въ самомъ дѣлѣ, произведенiе примитивныхъ относительно ξ_1 R—функцiй

$$A(\xi_1)=A(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$$

$$B(\xi_1)=B(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$$

даетъ тоже примитивную функцiю

$$E(\xi_1)=E(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q),$$

у которой коэффицiенты $E_i(\xi_2 \ldots \xi_q)$ не могутъ всѣ дѣлиться на $\Phi(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$.

Всѣ коэффицiенты $F(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)\Psi(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$ равные
$$\Theta_i(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)=F^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)\Psi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)E_i(\xi_2 \ldots \xi_q) \qquad (31)$$
дѣлятся по условiю на $\Phi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$.

Возьмемъ разложенiе $\Phi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$ на простые множители

$$\Phi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)=[\omega(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q]^{\lambda}[\varepsilon(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q]^{\mu} \ldots .$$

Мы найдемъ всегда ему соотвѣтствующiй коэфицiентъ (31), въ которомъ $E_i(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$ на него не дѣлится; тогда этотъ множитель дѣля произведенiе

$$\Omega(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)E_i(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q),$$

гдѣ

$$\Omega(\xi_2,\ \xi_3,\ \ldots \xi_q)=F^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)\Psi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q),$$

дѣлитъ $\Omega(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$ и будучи взаимнопростымъ съ

$$\Psi^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)$$

будетъ дѣлить

$$F^{(1)}(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q).$$

То же будетъ относиться и къ

$$[\omega(\xi_2,\ \xi_3 \ldots \xi_q)]^{\lambda}.$$

Раздѣливъ на эту функцію, получимъ

$$\Theta_{i1}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q) = F_1^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)\Psi^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)E_i(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q),$$

гдѣ

$$F_1^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q) = \frac{F^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)}{[\omega(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\lambda}.$$

Такъ какъ $\Theta_i(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q) = [\omega(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\lambda \Theta_{i1}(\xi_2, \xi_2 \ldots \xi_q)$ дѣлится на $\Phi^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$, а потому и на

$$[\varepsilon(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\mu,$$

то то же относится къ $\Theta_{i1}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$, такъ какъ

$$[\omega(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)^\lambda \text{ и } [\varepsilon(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\mu$$

взаимно просты.

Продолжая такимъ же образомъ, какъ выше съ $\Theta_i(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$ поступать съ $\Theta_{i1}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$, убѣждаемся, что $F_1^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$ дѣлится на $[\varepsilon(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\mu$, а $F^{(1)}(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$ на $[\omega(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q]^\lambda[\varepsilon(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)]^\mu$.

Поступая такимъ образомъ дальше, доказываемъ, что цѣлая R—функція $F^{(1)}$ дѣлится на цѣлую R—функцію $\Phi^{(1)}$.

А такъ какъ, какъ выше доказано, $C(\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_q)$ дѣлитъ $A(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$, то $\Phi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ должно дѣлить $F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$, что и требовалось доказать.

Отсюда тѣми же элементарными изслѣдованіями, какъ въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ и цѣлыхъ функцій, убѣждаемся въ томъ, что

произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ R—функцій тогда только дѣлится на простую (т. е. неразложимую) R—функцію или простое число p, если одинъ изъ множителей дѣлится на p.

Кромѣ того такимъ же образомъ выводимъ, что *не обращая вниманіе на порядокъ множителей и ихъ знаки, всякая цѣлая R—функція разлагается только однимъ образомъ на произведеніе простыхъ множителей.*

Теперь установимъ еще опредѣленіе неравенствъ между цѣлыми R—функціями.

Возьмемъ цѣлый полиномъ: $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q$ степени ρ въ общемъ видѣ и выпишемъ всѣ его коэффиціенты въ опредѣленномъ порядкѣ:

$$A_0, A_1 \ldots . A_{\lambda-1}, A_\lambda.$$

Придавая величинамъ этимъ значенія цѣлыя, получаемъ цѣлыя R—функціи отъ $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q$.

Взявъ двѣ R—функціи:

$$\Phi_1(\xi, \xi_2 \ldots \xi_q),$$

соотвѣтствующую значеніямъ (A):

$$A_{01}, A_{11}, \ldots A_{\lambda-1\cdot 1}, A_{\lambda\cdot 1}$$

и

$$\Phi_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q),$$

соотвѣтствующую значеніямъ (A):

$$A_{02}, A_{12} \ldots . A_{\lambda-1\cdot 2} . A_{\lambda\cdot 2}$$

равенство:

$$\Phi_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)=\Phi_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$$

будемъ понимать въ томъ смыслѣ, что

$$A_{j1}=A_{j2}, \qquad j=0, 1, 2 \ldots \lambda$$

неравенство:

$$\Phi_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) > \Phi_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$$

въ томъ смыслѣ, что

$$A_{\lambda.1} > A_{\lambda.2}$$

или, что

$$A_{\lambda\cdot 1} = A_{\lambda\cdot 2}$$

$$A_{\lambda-1\cdot 1} > A_{\lambda-1\cdot 2}$$

или, что

$$A_{\lambda\cdot 1} = A_{\lambda\cdot 2}$$
$$A_{\lambda-1\cdot 1} = A_{\lambda-1\cdot 2}$$
$$A_{\lambda-2\cdot 1} > A_{\lambda-2\cdot 2}$$

и т. д. вообще

$$A_{j\cdot 1} = A_{j\cdot 2} \qquad j=\lambda,\ \lambda-1, \ldots k+1$$
$$A_{k\cdot 1} > A_{k\cdot 2}.$$

Подъ абсолютной величиной цѣлой R—функціи

$$|\ \Phi(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)\ |$$

мы разумѣемъ цѣлую R—функцію съ коэффиціентами равными абсолютнымъ значеніямъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q).$$

$\Phi_1(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$ будетъ больше $\Phi_2(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$ *по абсолютной величинѣ*, если

$$|\ \Phi_1(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)\ | > |\ \Phi_2(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)\ |.$$

§ 6. Возвращаясь къ выраженію (16) для a_n, на основаніи доказаннаго нами, разлагаемъ $a_n^{(j)}(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n)$, $c_n(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_q)$ на простые множители и производимъ сокращенія, упрощающія выраженіе a_n, такъ что въ результатѣ

$$\begin{gathered} D[a_n^{(0)}(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n), \ldots a_n^{(\sigma-1)}(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n), \\ c_n(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n)]=1. \end{gathered} \tag{32}$$

Мы будемъ предполагать всегда:

1) *всѣ сокращенія произведенными,*
2) *трансцендентныя ξ_i алгебраически независимыми, иначе число ихъ доведеннымъ до возможнаго minimum'a.*

Изъ простыхъ множителей $c_n(\xi_1,\ \xi_2 \ldots \xi_n)$ выбираемъ наибольшій p_n по абсолютной величинѣ, который вполнѣ опредѣляется выраженіемъ (16) для a_n, такъ какъ возможно только одно разложеніе $c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ на простые множители.

При установленномъ понятіи неравенства между цѣлыми R—функціями, остается въ силѣ проведенная въ § 3 классификація простыхъ множителей.

Мы докажемъ, что какъ и въ случаѣ алгебраическихъ a_n, *при различныхъ возможныхъ выраженіяхъ типа (16) для a_n группы множителей (II) и (III) остаются безъ измѣненія, показатели множителей (II) измѣняются на конечныя величины, показатели множителей (III) совсѣмъ не мѣняются,* такъ что условія

$$P[k]$$

$$L[l]$$

$$A[k, l]$$

при различныхъ измѣненіяхъ выраженій для a_n, не мѣняются.

Если

$$\frac{\Omega_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} = \frac{\Omega_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)},$$

то это равенство имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ξ_i. Вслѣдствіе неприводимости уравненія, опредѣляющаго t (17), оно предполагаетъ равенство коэффиціентовъ

$$\frac{a_n^{(j)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)}{c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} = \frac{a^{(j)}_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)}{c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} = h_j$$

$c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ и $c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ представляютъ наименьшія кратныя знаменателей дробей (раціональныхъ R—функцій) h_j, предполагая послѣднія сокращенными.

Такъ какъ разложеніе на множители этихъ дробей возможно единственнымъ способомъ, то существуетъ только одно наименьшее кратное, иначе

$$c_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) = \pm c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q).$$

Возьмемъ теперь два выраженія:

$$a_n = \frac{\Omega_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t_1)}{c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} \qquad (16_1{}^{(1)})$$

$$a_n = \frac{\Omega_{n2}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t_2)}{c_{n2}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)}, \qquad (16_2{}^{(1)})$$

гдѣ t_1 и t_2 опредѣляются двумя различными неприводимыми уравненіями:

$$\omega_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t_1) = 0 \qquad (17_1{}^{(1)})$$

$$\omega_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t_2) = 0 \qquad (17_2{}^{(1)})$$

отвѣчающими различнымъ значеніямъ A_i въ (20) или вообще различнымъ раціональнымъ выраженіямъ t черезъ a и ξ_j:

$$t_1 = \pi_1(a_0, a_1 \ldots a_l, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) \qquad (33_1{}^{(1)})$$

$$t_2 = \pi_2(a_0, a_1 \ldots a_l, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q). \qquad (33_2{}^{(1)})$$

Точно также, какъ выше, въ простѣйшемъ случаѣ алгебраическаго a_n, обобщаемъ полученный результатъ. Разница только въ томъ, что вездѣ въ разсужденіяхъ цѣлыя числа замѣняются цѣлыми R—функціями, обладающими согласно § 7 необходимыми для доказательства свойствами. Мы имѣемъ

$$\begin{aligned} & g(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)\, c_{n2}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) = \\ & = \pm c_{n1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)[e_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)]^{\sigma_2 - 1} \end{aligned} \qquad (34)$$

гдѣ g, c_{n2}, c_{n1}, e_2 представляютъ въ общемъ случаѣ не цѣлыя числа, а цѣлыя R—функціи.

§ 7. Тѣ же опредѣленія и тѣ же результаты обобщаются и на случай выраженія (18) содержащаго произвольныя постоянныя C_j, въ которыхъ $a_n{}^{(j)}$ и c_n могутъ разсматриваться, какъ цѣлыя R—функціи отъ $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, C_1, C_2 \ldots C_n)$, такъ какъ между этими величинами можно предполагать отсутствіе алгебраическихъ зависимостей. Мы сдѣлаемъ здѣсь одно весьма важное для дальнѣйшаго замѣчаніе:

Положимъ, что c_n *вовсе не содержитъ произвольныхъ постоянныхъ* C_j. *Тогда замѣна* C_j *какими угодно алгебраическими или трансцендентными величинами не мѣняетъ условій:*

$$P[k].$$

Въ самомъ дѣлѣ замѣна C_{r+j} раціональной R—функціей

$$\frac{\alpha(\xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_q,\ C_1,\ C_2\ldots C_r,\ u)}{\beta(\xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_q,\ C_1,\ C_2\ldots C_r)}, \tag{35}$$

гдѣ u опредѣляется уравненіемъ типа (19)

$$\sum_{j=0}^{j=c}\varepsilon_{0i}(\xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_q,\ C_1,\ C_2\ldots C_r)u^j=0, \tag{36}$$

даетъ въ знаменателѣ a_n множитель

$$\beta(\xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_q,\ C_1,\ C_2\ldots C_r),$$

не зависящій отъ n. Замѣна u, t ихъ раціональными выраженіями въ

$$w=Au+Bt,$$

гдѣ A, B цѣлыя R—функціи, вводитъ еще независящій отъ n множитель:

$$\gamma(\xi_1,\ \xi_2\ldots\xi_q,\ C_1,\ C_2\ldots C_r).$$

Если теперь надлежащимъ образомъ взять R—функцію P и число Q, опредѣляющіе группы, то простые множители $\beta(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, C_1, C_2 \ldots C_r)$ и $\gamma(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q \ldots)$ можно отнести къ I и II группамъ.

Вслѣдствіе чего указанная замѣна не вліяетъ на (III) группу, откуда слѣдуетъ, что условіе $P[k]$ не подвергается измѣненію.

Если c_n *вовсе не содержитъ постоянныхъ произвольныхъ* C_j, *а степень* Ω_n *не превышаетъ относительно* C_j *конечнаго не зависящаго отъ* n *предѣла, то по замѣнѣ* C_j *алгебраическими или трансцендентными величинами, не мѣняются условія*

$$L[k] \text{ и } A[k,\ l].$$

Ибо въ самомъ дѣлѣ показатели степеней $\beta(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, C_1, C_2 \ldots C_r)$ и $\gamma(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, C_1, C_2 \ldots C_r)$ будутъ тогда величинами конечными и простые множители β и γ или относятся въ I группѣ или относясь ко II группѣ могутъ измѣнить показатели ихъ степеней $\lambda_n(p)$ лишь на конечныя величины.

§ 8. Мы теперь займемся всевозможными операціями надъ рядами:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{10}$$

удовлетворяющими условіямъ $A[k, l]$.

Отъ сложенія и вычитанія двухъ рядовъ

$$A_1(k, l)=a_0^{(1)}+a_1^{(1)}x+a_2^{(1)}x^2+\ldots$$

$$A_2(k, l)=a_0^{(2)}+a_1^{(2)}x+a_2^{(2)}x^2+\ldots$$

получается рядъ

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Если

$$a_n^{(i)}=\frac{\Omega_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t^{(i)})}{c_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)}, \tag{16_i) *}$$

полагая

$t=\sum_{i=1}^{i=2} \alpha^{(i)}t^{(i)}$, гдѣ $\alpha^{(i)}$ цѣлыя **) R—функціи, имѣемъ

$$t^{(i)k}=\frac{\sum_{j=0}^{j=\sigma^{(i)}-1} d_{ki}^{(s)} t^j}{e_i^k} \quad (37_i) \qquad \begin{array}{l} i=1,\ 2 \\ k=1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma^{(i)}-1 \end{array}$$

гдѣ $d^{(s)}_{ki}$, e_i цѣлыя R—функціи.

---

*) Въ этомъ выраженіи заключаются и (14) и (18) въ первомъ $q=0$ во второмъ нѣкоторые изъ ξ_i обозначены черезъ C_i. При первомъ выраженіи „цѣлыя R—функціи“ замѣняется выраженіемъ: „цѣлыя числа“.

**) *Weber:* Algebra B. I, § 150.

Отсюда слѣдуетъ:

$$a_n^{(i)} = \frac{\Omega_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{c_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) e_i^{\sigma^{(i)}-1}} \tag{38}$$

c_n въ a_n дѣлитъ наименьшее кратное

$$c_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q) e_i^{\sigma^{(i)}-1} \qquad i=1,\ 2.$$

Начиная съ достаточно большихъ значеній n, наибольшій простой множитель c_n будетъ входить и въ c_{n1} или c_{n2}, такъ какъ множитель e_i не превосходитъ конечнаго числа, а потому рядъ

$$\sum_{i=1}^{i=2} A_i(k, l)$$

удовлетворяетъ условію $P[k]$.

Если теперь $\lambda_n^{(1)}(p)$ показатель степени p въ $c_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}(p)$— —въ $c_n^{(2)}$, $\lambda_n^{(3)}(p)$ въ $d = e_1^{\sigma^{(1)}-1} e^{\sigma^{(2)}-1}$, то

$$\lambda_n(p) \leqq \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_n^{(i)}(p),$$

гдѣ $\lambda_n^{(3)}(p) = \lambda^{(3)}(p)$ не зависитъ отъ n.

Отсюда слѣдуетъ, что если $\frac{\lambda_n^{(i)}(p)}{n^l}$ конечны, то конечно и $\frac{\lambda_n(p)}{n^l}$, иначе имѣетъ мѣсто и условіе $L[l]$.

Символически полученный результатъ напишется въ видѣ

$$A_1(k,\ l) + A_2(k,\ l) = A(k,\ l)$$

или

$$A_1(k_1,\ l_1) + A_2(k_2,\ l_2) = A(k,\ l), \tag{39}$$

если k, l наибольшія изъ чиселъ

$$(k_1,\ k_2) \text{ и } (l_1,\ l_2)$$

или общнѣе

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i(k_i,\ l_i)=A(k,\ l), \tag{40}$$

гдѣ k, l наибольшія изъ чиселъ:

$$(k_1,\ k_2 \ldots k_n)$$

$$(l_1,\ l_2 \ldots l_n).$$

Отъ умноженія двухъ рядовъ $A_1(k,\ l)$ и $A_2(k,\ l)$ получаемъ рядъ, для котораго

$$a_n=\sum_{j=0}^{j=n} a_j^{(1)}a^{(2)}{}_{n-j}. \tag{41}$$

Выражая опять $a_n^{(i)}$ черезъ t, получаемъ, что знаменатель a_n до сокращенія будетъ наименьшимъ кратнымъ:

$$c_j^{(1)}\ c^{(2)}{}_{n-j}\ d^{(1)}\ d^{(2)},\quad j=0,\ 1,\ 2 \ldots \overline{n-1},\ n,$$

гдѣ $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ не зависятъ отъ n, такъ что начиная съ достаточно большихъ значеній n, p_n слѣдуетъ искать среди простыхъ множителей $c_j^{(1)}$ и $c^{(2)}{}_{n-j}$.

Тогда очевидно

$$\frac{p_n}{n^k}=\frac{p^{(i)}{}_{n-j}}{(n-j)^k}\ \frac{(n-j)^k}{n^k}<\frac{p^{(1)}{}_{n-j}}{(n-j)^k}$$

съ возрастаніемъ n сохраняетъ конечное значеніе.

Обозначая черезъ $\lambda^{(i)}{}_{n-ji}(p)$ показатели степени p въ $c^{(i)}{}_{n-j}$ при условіи что изъ всѣхъ $c_s^{(i)}$ въ $c^{(i)}{}_{n-j}$, p входитъ въ высшей степени, $\lambda'(p)$ показатель степени p въ $d^{(1)}d^{(2)}$, мы будемъ имѣть

$$\lambda_n(p) \leq \sum_{i=1}^{i=2} \lambda^{(i)}{}_{n-j_i}(p) + \lambda'(p).$$

Откуда легко видѣть, что при условіи конечности $\dfrac{\lambda^{(i)}{}_{n-j}(p)}{n^l}$, также $\dfrac{\lambda_n(p)}{n^l}$ конечно.

Итакъ

$$A_1(k\,,\,l\,)\,.\,A_2(k\,,\,l\,)=A(k,\,l)$$

$$A_1(k_1,\,l_1)\,.\,A_2(k_2,\,l_2)=A(k,\,l), \tag{42}$$

вообще

$$\prod_{i=1}^{i=n} A_i(k_i,\,l_i)=A(k,\,l). \tag{43}$$

Переходимъ теперь къ дѣленію; замѣтимъ, что

$$\frac{A(k,\,l)}{A_1(k,\,l)}$$

при $a_0^{(1)} \gtrless 0$ представляетъ рядъ

$$a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2 + \ldots . \tag{10$_2$}$$

причемъ $a_j^{(2)}$ опредѣляются изъ уравненій (41), которыя даютъ

$$a_n^{(2)} = \frac{\omega(a_0,\,a_0^{(1)},\,a_1,\,a_1^{(1)}\,\ldots\,a_n,\,a_n^{(1)})}{a_0^{(1)^{n+1}}}, \tag{44}$$

гдѣ ω означаетъ цѣлую функцію съ цѣлыми коэффиціентами n-ой степени относительно $a_0^{(1)}$, $a_j^{(1)}$, первой степени относительно a_0, a_j.

Подставляя въ (44) значенія a_0, $a_0^{(1)}$, a_j, $a_j^{(1)}$, получаемъ въ $c_n^{(2)}$ или множители входящіе въ c_j и $c_j^{(1)}$ $(j=0, 1, 2 \ldots n)$ или простые множители (II) класса (входящіе въ числитель $a_0^{(1)}$ если $a_0^{(1)}$ число раціональное, вообще входящіе въ d_n если положить

$$\frac{1}{a_0^{(1)}}=\frac{H(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{d_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)},$$

гдѣ H, d_n цѣлыя R—функціи), причемъ эти послѣдніе входятъ съ показателями $\lambda'_n(p)$ такими, что $\frac{\lambda'_n(p)}{n}$ число конечное.

Точно такимъ же образомъ, какъ при умноженіи рядовъ доказывается конечность $\frac{p_n}{n^k}$.

Затѣмъ

$$\lambda_n^{(2)}(p) \leq \lambda_{n-j}(p)+n\lambda^{(1)}{}_{n-j1}(p)+\lambda'_n(p).$$

Откуда вытекаетъ, что $\frac{\lambda_n^{(2)}(p)}{n^{l+1}}$ конечно, когда $\frac{\lambda_n(p)}{n^l}$, $\frac{\lambda_n^{(1)}(p)}{n^l}$, $\frac{\lambda'_n(p)}{n^l}$ (при $l>0$) конечны.

Итакъ

$$\frac{A_1(k, l)}{A_2(k, l)}=A(k, l+1) \tag{45}$$

при условіи, что

$$A_2(k, l) \text{ не дѣлится на } x.$$

Дифференцированіе ряда:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

черезъ которое a_n замѣняется $(n+1)a'_{n+1}$, замѣняетъ p_n на p_{n+1} или, если $p_{n+1}=n+1$ на какой либо другой множитель c_{n+1}, $\lambda_n(p)$ на число меньшее или равное $\lambda_{n+1}(p)$, даетъ для

$$\frac{p'_n}{n^k} \leq \frac{p_{n+1}}{n^k}=\frac{p_{n+1}}{n^k}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k<\frac{2p_{n+1}}{n^k}$$

и равнымъ образомъ для $\frac{\lambda'_n(p)}{n^k}$ конечную величину.

Поэтому

$$[A_1(k, l)]' = A(k, l) \tag{46}$$

$$[A(k, l)]^{(s)} = A(k, l) \tag{47}$$

При интегрированіи того же ряда a_n замѣняется $\frac{a_{n-1}}{n}$, p_{n+1} на p_n или n, $\lambda_{n+1}(p)$ на $\lambda_n(p)$, которыя какъ выше удовлетворяютъ условію $A(k, l)$, если только $k \geq 1$

$$\int A_1(k, l)dx = A(k, l) \tag{48}$$

$$\iiint \ldots A_1(k, l)dx^n = A(k, l) \tag{49}$$

Замѣтимъ, что въ теоремахъ, относящихся къ сложенію, умноженію и дѣленію, мы можемъ предполагать одинъ изъ рядовъ конечнымъ, напримѣръ степенью x^q или даже просто постояннымъ.

Соединяя всѣ полученные результаты: (40), (43), (47), (49) и обозначая для краткости:

$$\int f(x)dx = [f(x)]^{(-1)}$$

$$f(x) = [f(x)]^{(0)}$$

будемъ имѣть:

$$\Phi[A_1^{(i_1)}(k_1, l_1), A_2^{(i_2)}(k_2, l_2) \ldots A_s^{(i_s)}(k_s, l_s)] = A(k, l) \tag{50}$$

$$k \text{ наиб. изъ } (k_1, k_2 \ldots k_s),\ l \text{ наиб. изъ } (l_1, l_2 \ldots l_s),$$

гдѣ Φ цѣлая функція величинъ заключенныхъ въ скобки съ коэффиціентами представляющими раціональныя R—функціи, т. е. раціональныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ конечнаго числа алгебраическихъ и трансцендентныхъ величинъ.

Называя операціи, при помощи которыхъ отъ $A_i(k_i, l_i)$ мы переходимъ къ $A(k, l)$, *конечными аналитическими дѣйствіями*, мы будемъ имѣть, *что совокупность всѣхъ конечныхъ аналитическихъ дѣйствій надъ $A_i(k_i, l_i)$, кромѣ дѣленія, приводитъ къ $A(k, l)$, гдѣ k есть наибольшее изъ k_i, l наибольшая изъ l_i* *).

Возможно еще дальнѣйшее обобщеніе, которое совершенно также доказывается, какъ всѣ теоремы настоящаго параграфа:

Рядъ $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, составленный при помощи рядовъ:

$$a_0^{(i)}+a_1^{(i)}x+a_2^{(i)}x^2+\ldots$$

такимъ образомъ, что

$$a_n=\frac{\omega_n(a_0^{(i)},\ a_1^{(i)},\ a_2^{(i)}\ \ldots\ a_p^{(i)},\ a^{(i)}_{p+1}\ \ldots\ a_n^{(i)})}{\varepsilon_n}, \tag{51}$$

гдѣ ω_n цѣлая функція $a_j^{(i)}$ съ коэффиціентами, равными цѣлымъ R—функціямъ, ε_n цѣлая R—функція, причемъ:

1) показатель степени ω_n относительно $a_j^{(i)}$, гдѣ $j\leq p$ конечнаго числа, не зависящаго отъ n, находится въ конечномъ отношеніи съ n,

2) показатель степени ω_n относительно $a_j^{(i)}$, $j>p$ всегда конеченъ,

3) ε_n содержитъ только простые множители, находящіеся въ конечномъ отношеніи къ n, съ показателями, находящимися въ конечномъ отношеніи къ n,

удовлетворяетъ условію

$$A(k,\ l),$$

если ряды

$$a_0^{(i)}+a_1^{(i)}x+a_2^{(i)}x^2+\ldots$$

---

*) При этомъ k_i, l_i могутъ имѣть какіе угодно значенія, кромѣ $k_i=0$. При $k_i=0$ (напр. въ случаѣ теоремы Эйзенштейна) слѣдуетъ исключить еще интегрированіе.

удовлетворяютъ условію

$$A(k_i,\ l_i)$$

(k_i, l_i не всѣ равны нулю), k, l наибольшія изъ чиселъ (k_1, k_2 ...) и (l_1, l_2 ...).

Въ частномъ случаѣ ε_n можетъ привестись къ конечному числу.

Слѣдуетъ еще имѣть въ виду, что *въ $A(k,\ l)$, получаемомъ при помощи всѣхъ конечныхъ аналитическихъ дѣйствій кромѣ дѣленія надъ $A_i(k_i,\ l_i)$, въ знаменателяхъ коэффиціентовъ заключаются только тѣ простые множители группъ (III) и (II), которые будемъ обозначать черезъ (A), которые заключаются въ знаменателяхъ коэффиціентовъ одного изъ рядовъ $A_i(k_i,\ l_i)$.*

Тоже относится и къ операціи болѣе общаго типа (51).

§ 9. Мы разсмотримъ теперь еще другой родъ символовъ.

Возьмемъ рядъ:

$$a_{01}+a_{11}x+a_{21}x^2+\dots \qquad (A_1)$$

и знаменатель $a_{n1}-c_{n1}$ разложимъ на множители:

$$c_{n1}=\prod\gamma_{\text{I}n_1}^{\lambda_{\text{I}_1}}\prod\gamma_{\text{II}n_1}^{\lambda_{\text{II}_1}}\prod\gamma_{\text{III}n_1}^{\lambda_{\text{III}_1}}, \qquad (52_1)$$

гдѣ

$$\prod\gamma_{\text{I}_1}^{\lambda_{\text{I}_1}}$$

$$\prod\gamma_{\text{II}_1}^{\lambda_{\text{II}_1}}$$

$$\prod\gamma_{\text{III}_1}^{\lambda_{\text{III}_1}}$$

представляютъ произведенія простыхъ множителей различныхъ группъ.

Тоже сдѣлаемъ съ

$$c_{n2} = \prod \gamma_{\mathrm{I}n_2}^{\lambda_{\mathrm{I}_2}} \prod \gamma_{\mathrm{II}n_2}^{\lambda_{\mathrm{II}_2}} \prod \gamma_{\mathrm{III}n_2}^{\lambda_{\mathrm{III}_2}}, \qquad (52_2)$$

относящемся къ другому ряду

$$a_{02} + a_{12}x + a_{22}x^2 + \dots . \qquad (A_2)$$

Пусть первый рядъ удовлетворяетъ условію $A[k_1, l_1]$ второй $A[k_2, l_2]$.

Исключая изъ разложенія (52_2) всѣ множители (II) и (III) входящіе въ знаменатели c_{j1}, $j=0, 1, 2\dots$, получаемъ рядъ:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \qquad (A)$$

для котораго c_n содержитъ только

1) простые множители (A_2), т. е. (II) и (III) группъ въ c_{n2},

2) простые множители (I) группы въ c_{n1}, если выбрать надлежащимъ образомъ P, Q, опредѣляющіе группы.

Если рядъ (A_2) удовлетворяетъ условію $A[k_2, l_2]$, а рядъ (A), получаемый черезъ *исключеніе множителей* (A_1), условію $A[k, l]$, то совокупность этихъ условій будемъ означать черезъ

$$A[k_2, l_2, A_1 \mid k, l],$$

а рядъ этимъ условіямъ удовлетворяющій черезъ

$$A(k_2, l_2, A_1 \mid k, l).$$

Если взять вмѣсто двухъ, нѣсколько рядовъ A_1, $A_2 \dots A_p$, то символъ:

$$A[k_p, l_p, A_{p-1} \mid k', l', A_{p-2} \mid k'', l'' \dots A \mid k^{(p-1)}, l^{(p-1)}]$$

будетъ означать условія:

1) Для ряда A_p, $A[k_p, l_p]$.

2) Для ряда A', получаемаго исключеніемъ множителей (A_{p-1}), $A[k', l']$.

3) Для ряда A'' получаемаго изъ A'' исключеніемъ (A_{p-2}) или тоже изъ A_p исключеніемъ (A_{p-1}) и (A_{p-2}),—$A[k'', l'']$ и т. д.

Такъ какъ конечныя аналитическія дѣйствія (кромѣ дѣленія) приводятъ къ множителямъ (A), заключающимся среди множителей (A_1), $(A_2)\ldots$ относящихся къ различнымъ рядамъ, надъ которыми производятся дѣйствія, то формулу (50) мы можемъ замѣнить слѣдующей

$$\begin{aligned}&\Phi[A_1^{(i_1)}(k_1, l_1), A_2^{(i_2)}(k_2, l_2)\ldots A_s^{(i_s)}(k_s, l_s)]=\\&=A(k, l, A_1 \mid k', l' \ldots A_s \mid k^{(s)}, l^{(s)}),\end{aligned} \tag{53}$$

гдѣ

(k, l) наибольшія изъ чиселъ $(k_1, k_2 \ldots k_s)(l_1, l_2 \ldots l_s)$
$(k^{(i)}, l^{(i)})$ наибольшія изъ чиселъ $(k_{i+1}, k_{i+2} \ldots k_s)(l_{i+1}, l_{i+2} \ldots l_s)$

Конечныя аналитическія дѣйствія (кромѣ дѣленія) надъ рядами $A(k, l)$ согласно § 8 не нарушаютъ условія $A[k, l]$. Разсужденія § 8 могутъ быть примѣнены къ множителямъ получаемымъ черезъ исключеніе множителей (A_1), и мы легко убѣждаемся, что тѣ же дѣйствія не нарушаютъ условій

$$A[k_2, l_2, A_1 \mid k, l].$$

Вообще *конечныя аналитическія дѣйствія надъ рядами удовлетворяющими условію*

$$A[k_p, l_p, A_{p-1} \mid k', l', A_{p-2} \mid k'', l'' \ldots A \mid k^{(p-1)}, l^{(p-1)}]$$

не нарушаютъ этого условія.

Въ заключеніе параграфа замѣтимъ, что, если

A_1 выражается при помощи конечныхъ аналитическихъ дѣйствій (кромѣ дѣленія) черезъ B_1,

$$A_2 - B_1,\ B_2,$$
$$A_3 - B_1,\ B_2,\ B_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_p - B_1,\ B_2,\ B_3 \dots B_p,$$

то всѣ множители

$$(A_1) \text{ заключаются среди } (B_1)$$
$$(A_2) - (B_1),\ (B_2)$$
$$(A_3) - (B_1),\ (B_2),\ (B_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(A_p) - (B_1),\ (B_2),\ (B_3) \dots (B_p).$$

Поэтому исключеніе (B_1) ведетъ исключеніе (A_1), исключеніе (B_2) по исключеніи (B_1) ведетъ исключеніе (A_2) и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что изъ условій

$$A[k_1,\ l_1,\ A_1 \mid k'_2,\ l'_2 \dots A_p \mid k'_p,\ l'_p]$$

вытекаетъ условіе:

$$A[k_1,\ l_1,\ B_1 \mid k'_2,\ l'_2 \dots B_p \mid k'_p,\ l'_p].$$

При условіи, что $l_i \geqq 1$ этотъ результатъ остается въ силѣ и по включеніи въ число дѣйствій надъ B_i также дѣленія, при условіи, что оно даетъ во всѣхъ случаяхъ голоморфные ряды. Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія (44) § 8 слѣдуетъ, что дѣленіе можетъ ввести въ A_j множители, невходящіе въ (B_i) $i=1, 2 \dots j$, только тѣ, которые принадлежатъ къ I и II классу, при чемъ для послѣднихъ $l=1$. Послѣ указанныхъ выше исключеній будутъ оставаться въ (A_1) (A_2) и т. д. только тѣ конечные множители, для которыхъ $l=1$. Ясно, что исключеніе этихъ послѣднихъ на значенія (k, l) для соотвѣтствующихъ рядовъ не вліяетъ.

§ 10. Переходимъ теперь къ болѣе общему разложенію:

$$y = x^r[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots] \tag{54}$$

регулярнаго интеграла дифференціальнаго уравненія

$$p_0(x)y^{(m)}+p_1(x)y^{(m-1)}+\ldots p_{m-1}(x)y'+p_m(x)y=0 \qquad (8)$$

$$p_i(x)=x^{\rho_i}q_i(x) \qquad (9)$$

r, какъ извѣстно изъ изслѣдованій Фукса [1]) и Томэ [2]), опредѣляется изъ слѣдующаго уравненія степени $m-h$:

$$S_h(0)r(r-1)\ldots[r-(m-h)+1]+$$
$$+S_{h+1}(0)r(r-1)\ldots[r-(m-h)+2]+\ldots S_h(0)=0, \qquad (55)$$

гдѣ

$$S_{h+i}(x)=x^{\rho_{h+i}-\rho_h+i}p_{h+i}(x). \qquad (56)$$

Число h или число $m-h$, означающее число регулярныхъ интеграловъ уравненія (8), опредѣляется согласно изслѣдованіямъ Томэ слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что наибольшее изъ чиселъ ряда:

$$\rho_0-\rho_1+m-1,\ \rho_0-\rho_2+m-2,\ \ldots\ \rho_0-\rho_m \qquad (57)$$

число g, которое при условіи, что уравненіе (8) имѣетъ регулярный интегралъ, должно быть больше m. Пусть $\rho_0-\rho_h+$ $+m-h$ представляетъ первый членъ ряда (57) равный g. Искомый высшій предѣлъ для числа регулярныхъ интеграловъ уравненія (8) равенъ $m-h$.

Вмѣстѣ съ (57) разсмотримъ еще рядъ

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2\ \ldots\ \rho_m; \qquad (58)$$

пусть наименьшее значеніе ρ_j равно l. Первое число равное l въ ряду (58) назовемъ ρ_f.

Числа h и f будутъ имѣть весьма важное значеніе въ нашихъ изслѣдованіяхъ ариѳметическихъ свойствъ разложенія (54). Мы ихъ назовемъ *характеристиками линейнаго уравненія (8)*.

---

[1]) *Fuchs* (Journal de Crelle t. 66 et 68).
[2]) *Thomé* (Journal de Crelle t. 74 et 75).
Picard, Traité d'Analyse t. III p. 253.

Если мы положимъ $y=x^r y_1$ (59), то получимъ уравненіе:

$$p_0^{(1)}(x,\ r)y_1^{(m)}+p_1^{(1)}(x,\ r)y_1^{(m-1)}+\ldots p^{(1)}_{m-1}(x,\ r)y'_1+ \tag{60}$$
$$+p^{(1)}_m(x,\ r)y=0,$$

въ которомъ

$$p_i^{(1)}(x,\ r)=\sum_{j=0}^{j=i} P_r^{m-j}p_j(x,\ r)x^{\rho_j-m+j} \tag{61}$$

$$P_r^{m-j}=r(r-1)\ldots(r-m+j+1) \tag{62}$$
$$P_r^{(0)}=1$$

представляютъ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами $(x,\ r)$.

Если r не цѣлое положительное число, то $P_r^{m-j} \gtrless 0$ и мы имѣемъ

$$p_i^{(1)}(x,\ r)=x^{\rho_i^{(1)}}q_i^{(1)}(x,\ r), \tag{63}$$

гдѣ $q_i^{(1)}(x,\ r)$ не дѣлится на x и гдѣ $\rho_i^{(1)}$ представляетъ наименьшее изъ чиселъ

$$\rho_j-m+j$$
$$j=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ i.$$

Очевидно

$$\rho_0^{(1)}\geqq\rho_1^{(1)}\geqq\rho_2^{(1)}\ \ldots\ \geqq\rho_m^{(1)},$$

$\rho_m^{(1)}=\rho_h-m+h$, гдѣ h будетъ то число, при которомъ $\rho_0-\rho_j+$ $+m-j$ имѣетъ наибольшее значеніе.

Итакъ коэффиціентъ, для котораго $x=0$ корень съ наименьшимъ порядкомъ, ёсть $p_m(x)$ и *въ случаѣ ирраціональнаго* r

$$f=m.$$

Изслѣдованіе разложенія (54) сводится къ изслѣдованію разложенія (10), но при условіи, что $p_i(x)$ цѣлыя функціи отъ x съ коэффиціентами вида

$$\sum_{j=0}^{j=m-h-1} \lambda_j r^j,$$

гдѣ λ_j цѣлыя числа, или, если уравненіе (55) приводимо и r опредѣляется нисшей, чѣмъ $m-h$ степени:

$$\sum_{j=0}^{j=\chi} \psi_j r^j = 0, \quad \chi < m-h \tag{64}$$

вида

$$\sum_{j=0}^{j=\chi-1} \lambda_j r^j.$$

Для a_n мы получаемъ тѣ же формулы (14), (16) и (18) § 2, но съ той разницей, что вмѣсто цѣлыхъ коэффиціентовъ вездѣ будутъ цѣлыя алгебраическія числа въ области опредѣляемой уравн. (64), которыя при помощи выраженія t и r съ помощью

$$t_1 = \alpha t + \beta r,$$

гдѣ α, β цѣлыя числа или цѣлыя R—функціи, приводится опять къ виду (14), (16) и (18), гдѣ коэффиціентами будутъ опять цѣлыя числа и потому становятся возможными всѣ опредѣленія §§ 3 и 9.

Мы будемъ говорить, что рядъ

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \tag{54}$$

подчиняется условіямъ $P(k)$, $L(l)$ и $A(k, l)$, если этимъ условіямъ подчиняется рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Рядъ

$$x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \tag{54}$$

мы можемъ всегда представить въ видѣ

$$x^{r'}(a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \ldots),$$

гдѣ $a'_0 \gtrless 0$ подчиняющимся тому же условію $A(k, l)$, какъ (54).

Ибо если $a_0 = a_1 = \ldots a_{k-1} = 0$, $a_k \gtrless 0$, полагая

$$r + k = r'$$

будемъ имѣть

$$x^{r'}(a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \ldots),$$

гдѣ $a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \ldots$, какъ получаемый изъ $a_0 + a_1x + {} + a_2x^2 + \ldots$ дѣленіемъ на x^k, удовлетворяетъ условію $A(k, l)$.

§ 11. Такъ какъ всѣ дѣйствія надъ рядами (54), которые будемъ обозначать черезъ

$$\overset{r}{A}(k, l) = x^r A(k, l),$$

сводятся къ дѣйствіямъ надъ $A(k, l)$ при томъ условіи, что $A(k, l)$ не дѣлится на x, всѣ формулы §§ 8 и 9 получаютъ обобщеніе:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \overset{r}{A}(k_i, l_i) = \overset{r}{A}(k, l) \qquad (40_r)$$

$$\prod_{i=1}^{i=n} \overset{r}{A_i}(k_i, l_i) = \overset{r}{A}(k, l) \qquad (43_r)$$

$$\left[\overset{r}{A_1}(k, l)\right]^{(s)} = \overset{r}{A}(k, l) \qquad (47_r)$$

$$\int^{(n)} \overset{r}{A_1}(k_1, l_1)dx^n = \overset{r}{A}(k, l) \quad (k_i > 0), \qquad (49_r)$$

гдѣ k, l наибольшія изъ чиселъ $(k_1, k_2 \ldots)(l_1, l_2 \ldots)$.

Но въ виду недѣлимости $A(k, l)$ на x къ этимъ свойствамъ присоединяется еще слѣдующее:

$$\frac{\overset{r}{A_1}(k_1, l_1)}{\overset{r}{A_2}(k_2, l_2)} = \overset{r}{A}(k, l+1) \qquad (l > 0) \qquad (45_r)$$

Поэтому

$$\Psi[\overset{r}{A}_1{}^{(i_1)}(k_1,\ l_1),\ \overset{r}{A}_2{}^{(i_2)}(k_2,\ l_2)\ \dots\ \overset{r}{A}_s{}^{(i_s)}(k_s,\ l_s)]=A(k,\ t), \tag{65_r}$$

гдѣ Ψ означаетъ раціональную, а не обязательно цѣлую, какъ въ § 8, R—функцію, причемъ $t=l$ въ случаѣ Ψ цѣлаго и $t=l+1$ въ случаѣ Ψ дробнаго.

Такимъ точно образомъ опредѣленія и основная формула § 9 получаетъ свое обобщеніе. А именно

$$\begin{gathered}\Psi[\overset{r}{A}_1{}^{(i_1)}(k_1,\ l_1),\ \overset{r}{A}_2{}^{(i_2)}(k_2,\ l_2)\dots\ \overset{r}{A}_s{}^{(i_s)}(k_s,\ l_s)]=\\ =\overset{r}{A}[k^{(0)},\ t^{(0)}\,\overset{r}{A}_1\mid k^1,\ t^1\ \dots\ \overset{r}{A}_s\mid k,\ t].\end{gathered} \tag{66_r}$$

гдѣ $t^{(i)}$ равно $l^{(i)}$ или $l^{(i)}+1$, $k^{(i)}$, $l^{(i)}$ наибольшія изъ чиселъ

$$(k_{i+1},\ k_{i+2}\ \dots\ k_s)(l_{i+1},\ l_{i+2}\ \dots\ l_s).$$

§ 12. Возвращаясь опять къ разложенію (10) интеграла уравненія (8), мы докажемъ, что *въ случаѣ цѣлыхъ коэффиціентовъ $p_i(x)$ можно положить*

$$\text{при } p(0)\gtrless 0,\ k=1 \ \text{ при } p(0)=0 : k=f.$$

Рядъ

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \tag{10}$$

удовлетворяетъ условію $P(1)$ или $P(f)$, иначе говоря $\frac{p}{n}$ или $\frac{p_n}{n^f}$, *гдѣ p_n старшій множитель въ знаменателѣ a_n, f имѣетъ значеніе, указанное въ § 10 (характеристика линейнаго уравненія (8)), при возрастаніи n сохраняетъ конечное значеніе.*

Мы возьмемъ сперва простѣйшій случай, когда уравненіе (8) приводится по сокращеніи къ виду:

$$\alpha_0(x)y^{(m)}+\alpha_1(x)y^{(m-1)}+\ \dots\ \alpha_m(x)y=0 \tag{67}$$

$\alpha_i(x)$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами, причемъ $\alpha_0(x)$ *не дѣлится на x, иначе* $\alpha_0(0)\gtrless 0$.

Если уравненіе (8) Фуксовскаго типа (2, 3), то условіе это равносильно слѣдующему:

$x=0$ не принадлежитъ къ критическимъ точкамъ линейнаго уравненія. Въ этомъ случаѣ рядъ (10) удовлетворяетъ условію $P(1)$, т. е. $\frac{p_n}{n}$ сохраняетъ конечную величину.

Для доказательства опредѣляемъ изъ (8) $y^{(m)}$ въ функціи отъ $y^0=y,\ y' \ldots y^{(m+1)}$:

$$y^{(m)}=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{j=m}\alpha_j(x)y^{(m-j)}}{\alpha_0(x)}. \tag{68_m}$$

Дифференцируя ур. (8), опредѣляемъ $y^{(m+1)}$ въ $y,\ y' \ldots y^{(m-1)}$ и т. д., вообще:

$$y^{(m+i)}=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{j=m+i}\alpha_j^{(i)}(x)y_0^{(m+i-j)}}{\alpha_0(x)}, \tag{68_{m+i}}$$

гдѣ $\alpha_j^{(i)}(x)$, какъ и $\alpha_0(x)$ цѣлыя функціи x съ цѣлыми коэффиціентами.

Исключая при помощи уравненій $(68_{m+k})(k<i)$ въ выраженіи: $y^{(m+i)}$ величины $y^{(m)} \ldots y^{(m+i-1)}$, получаемъ:

$$y^{(m+i)}=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{j=m}\alpha_{ji}(x)y^{(m-j)}}{\alpha^i{}_0(x)}. \tag{69_{m+i}}$$

При $x=0$

$$y_0^{(m+i)}\ \frac{-\sum\limits_{j=1}^{j=m}\alpha_{ji}(0)y_0^{(m-j)}}{\alpha_0{}^i(0)}. \tag{$69^{(0)}{}_{m+i}$}$$

Если теперь c обозначаетъ наименьшее кратное $c_0,\ c_1 \ldots . c_{m-1}$, то подставляя значенія $y,\ y' \ldots . y^{(m-1)}$, выражаемыя формулами (14), (16) и (18), будемъ имѣть:

$$y_0^{(m+i)}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{j=\sigma-1} a^{(j)}{}_{m+i}\,t^{(j)}}{\alpha_0{}^i(0)c}, \tag{70}$$

гдѣ $a^{(j)}{}_{m+i}$ цѣлыя R—функціи (числа); отсюда

$$a_{m+i}=\frac{\Omega_{m+i}}{\overline{m+i}!c\alpha_0{}'} \tag{71}$$

α_0 цѣлое число, что предполагаетъ дѣлимость $\overline{m+i}!\ c\alpha_0{}^i$ на c_{m+i}.

Такимъ образомъ p_n должно дѣлить $1, 2 \ldots . n$ или $c\alpha_0{}^i$ т. е., если p_n цѣлое число, то оно во всякомъ случаѣ не превышаетъ n. Если p_n цѣлая R—функція, то принимая за A_λ (см. § 5 опредѣленіе понятія неравенства между R-функціями) свободный членъ, который будетъ величиной конечной, не зависящей отъ n, мы будемъ имѣть также

$$p_n \leq n.$$

Итакъ всегда

$$\frac{p_n}{n} < 1$$

сохраняетъ при возрастаніи n конечную величину, т. е. рядъ (10) удовлетворяетъ условію $P(1)$.

§ 13. *Когда* $\alpha_0(0)=0$, то уравненіе (68_{m+i}) даетъ для $y^{(m+i)}$ неопредѣленное выраженіе.

Въ этомъ случаѣ въ уравненіяхъ получаемыхъ дифференцированіемъ уравненія (67)

$$\alpha_0{}^{(i)}y^{(m+i)}+\alpha_1{}^{(i)}(x)y^{(m+i-1)}+\ldots . \alpha^{(i)}{}_{m+i}(x)y=0, \tag{$67^{(i)}$}$$

гдѣ, согласно формулѣ Лейбница

$$\alpha_j{}^{(i)}(x)=\sum_{s=0}^{s=j} C_i^s\left[\frac{\partial^s\alpha_{j-s}(x)}{\partial x^s}\right]_{x=0}, \tag{72}$$

(гдѣ C_i^s число сочетаній изъ i элементовъ по s) представляютъ цѣлыя функціи x съ цѣлыми коэффиціентами.

Уравненія ($67^{(i)}$) опредѣляютъ не

$$y^{(m+i)}$$

въ функціи отъ $y, y' \ldots y^{(m+i-1)}$, а

$$y^{(m+i-t)} \qquad t < m$$

въ

$$y, y' \ldots y^{(m+i-t-1)}.$$

Положимъ, что

$$\left[\frac{\partial^s \alpha_{j-s}(x)}{\partial x^s}\right]_{x=0} = 0 \tag{73}$$

при $s=1, 2 \ldots j$, $j=0, 1, 2 \ldots \overline{t-1}$, такъ что

$$\alpha_j^{(i)}(0) = 0$$

при $j=1, 2 \ldots \overline{t-1}$ и для всякого i.

Легко видѣть, что, если тѣ же условія (73) не имѣютъ мѣста для $j=t$, то при достаточно большомъ i коэффиціентъ $\alpha_j^{(i)}(0)$ будетъ отличенъ отъ нуля и при слѣдующихъ значеніяхъ онъ уже не будетъ обращаться въ нуль и по численной величинѣ будетъ безконечно возрастать.

Въ самомъ дѣлѣ для этого достаточно опредѣлить корни относительно i слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$\Phi_t(i) = 0 \tag{74}$$

$$\frac{\partial \Phi_t(i)}{\partial i} = 0, \tag{75}$$

гдѣ

$$\Phi_t(i) = \sum_{s=0}^{s=t} C_i^s \left[\frac{\partial^s \alpha_{j-s}(x)}{\partial x^s}\right]_{x=0},$$

и взять i большимъ, чѣмъ наибольшій изъ этихъ корней π.

При этихъ условіяхъ мы можемъ опредѣлить $y^{(m+t+1)}$ въ функціи отъ

$$y,\ y',\ y''\ \dots\ y^{(m+i)}$$

въ формѣ:

$$y_0{}^{(m+i)} = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{j=m+i} \alpha_j{}^{(i)}(0) y_0{}^{(m+i-j)}}{\Phi_t(i)}, \tag{76}$$

гдѣ $\alpha_j{}^{(i)}(0)$, $\Phi_t(i)$ цѣлыя числа, откуда

$$y_0{}^{(m+i)} = \frac{-\sum\limits_{j=1}^{s=m+\pi} \alpha_{ji}(0) y^{(m+\pi-j)}}{\prod\limits_{j=\pi}^{j=i} \Phi_t(j)} \tag{77}$$

или, если c наименьшее кратное:

$$c_0,\ c_1,\ c_2\ \dots\ c_{\pi-1},$$

то

$$y_0{}^{(m+i)} = \frac{\Omega_{m+i}}{c \prod\limits_{j=\pi}^{j=i} \Phi_t(j)} \tag{78}$$

или, наконецъ,

$$a_{m+i} = \frac{\Omega_{m+i}}{\overline{m+1}!\, c \prod\limits_{j=\pi}^{j=i} \Phi_t(j)}, \tag{79}$$

гдѣ Ω_{m+i} R—функція (число) типа

$$\prod_{j=0}^{s=\sigma-1} a^{(j)}{}_{m+i}\, t^{(j)}$$

опредѣляется уравненіемъ (15), (17) или (19)

$$p_n \text{ дѣлитъ } n!\ c \sum_{j=\pi}^{j=i} \Phi_t(j). \tag{80}$$

При достаточно большихъ n или i отношеніе $\Phi_t(i)=\Phi_{0t}i^t+\ldots$ къ $n=m+i$ можетъ быть какъ угодно велико.

Для такихъ значеній n, $\Phi_t(i)$ будетъ наибольшимъ множителемъ произведенія (80). Если p_n числовой множитель, то во всякомъ случаѣ:

$$p_n \leq |\Phi_t(i)|.$$

Если p_n—R—множитель, то принимая опять за A_λ свободный членъ, имѣемъ что всѣ множители c меньше n и $\Phi_t(i)$, откуда $\Phi_t(i)$ опять наибольшій изъ множителей и $p_n \leq \Phi_t(i)$.

Если въ $\Phi_t(i)$ наибольшій по численной величинѣ коэффиціентъ M_t, то

$$|\Phi_t(i)| \leq i^t M_t(t+1)$$

$$\frac{p_n}{i^t} \leq M_t(t+1)$$

$$\frac{p_n}{n^t} \leq \frac{p_n}{i^t} \cdot \frac{i^t}{n^t} < \frac{p_n}{i^t} \leq M_t(t+1). \tag{81}$$

Такъ какъ

$$\alpha_j(x)=x^{\varepsilon_j}\beta_j(x)$$

$$\varepsilon_j=\rho_j-\rho_f,$$

гдѣ ρ_f наименьшее изъ чиселъ ρ_j, то условія (73) предполагаютъ:

$$t \leq \varepsilon_j+j$$

или

$$t \leq \rho_j-\rho_f+j,$$

что при $j=f$ даетъ:

$$t \leq f. \tag{82}$$

Откуда, такъ какъ

$$\frac{p_n}{n^f} \leq \frac{p_n}{n^t},$$

слѣдуетъ на основаніи неравенства (81), что $\frac{p_n}{n^f}$ сохраняетъ конечную величину при возрастаніи n, иначе говоря доказываемъ положеніе объявленное въ началѣ § 12.

Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{p_n}{n^m}$, *гдѣ m порядокъ уравненія (22) сохраняетъ конечную величину.*

$y, y'_0 \dots y_0^{(f+i-t-1)}$ и еще нѣкоторое число величинъ: $y^{(\lambda)}, y^{(\mu)} \dots$ отвѣчающихъ $\Phi_t(j)=0$ не опредѣляются изъ уравненія (67) и могутъ получать какія угодно алгебраическія или трансцендентныя значенія. Всѣ остальныя $y^{(i)}$ и имъ отвѣчающія a_i опредѣляются въ алгебраическихъ функціяхъ отъ этихъ величинъ. Отсюда слѣдуетъ, что число трансцендентныхъ ξ_i, входящихъ въ a_i, не превосходитъ $t+\omega$, гдѣ ω число цѣлыхъ положительныхъ корней уравненія

$$\Phi_t(i)=0.$$

§ 14. Переходимъ теперь къ условіямъ $L(l)$.

Мы покажемъ, что при $p_0(0) \gtrless 0$ *рядъ (10) удовлетворяетъ условію* $L(1)$, *при* $p_0(0)=0$ *условію* $L(f)$.

Ограничиваясь опять сперва простѣйшимъ случаемъ, когда $\alpha_0(0) \gtrless 0$, замѣчаемъ, что, если $\lambda_n^{(1)}(p)$ показатель степени, въ которой p входитъ въ $n!$, а $\lambda_n^{(2)}(p)$, $\lambda_n^{(3)}(p)$ показатели степеней p въ c, $\alpha_0(0)$, на основаніи уравненія (71) будемъ имѣть:

$$\lambda_n(p) \leq \lambda_n^{(1)}(p)+\lambda_n^{(2)}(p)+i\lambda_n^{(3)}(p). \tag{83}$$

Задача объ опредѣленіи $\lambda_n^{(1)}(p)$ рѣшается въ Алгебрѣ Ю. В. Сохоцкаго *), гдѣ дается слѣдующій результатъ:

$$\lambda_n^{(1)}(p)=\sum_{j=1}^{j=q} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^j}\right), \tag{84}$$

гдѣ q наибольшее значеніе j, для котораго

$$\frac{n}{p^j} \geq 1,$$

*) *Ю. Сохоцкій.* Алгебра. Теорія чиселъ, стр. 13.

E обозначаетъ наибольшее цѣлое число въ дроби $\frac{n}{p^j}$, откуда

$$\lambda_n^{(1)}(p) < n\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots \frac{1}{p^q}\right] < \frac{n}{p-1}.$$

Неравенство (83) тогда даетъ:

$$\lambda_n(p) < \frac{n}{p-1} + \lambda_n^{(2)}(p) + i\lambda_n^{(3)}(p)$$

отсюда же

$$\frac{\lambda_n(p)}{n} < \frac{1}{p-1} + \frac{\lambda_n^{(2)}(p)+i\lambda_n^{(3)}(p)}{n}.$$

Если $\lambda_n^{(23)}(p)$ наибольшее по численной величинѣ изъ чиселъ $\lambda_n^{(2)}(p)$, $\lambda_n^{(3)}(p)$, то

$$\frac{\lambda_n(p)}{n} < \frac{1}{p-1} + 2\lambda_n^{(23)}(p), \tag{85}$$

т. е.

$$\frac{\lambda_n(p)}{n}$$

при возрастаніи n сохраняетъ конечную величину.

Для случая R—множителя, могущаго входить только въ c, значеніе l понижается до нуля и условіе $L(1)$ замѣняетъ $L(0)$. *Для* $\alpha_0(0)=0$ замѣчаемъ, что произведеніе:

$$\prod_{j=\kappa}^{j=i} \Phi_t(j),$$

вслѣдствіе установленныхъ въ § 13 условій относительно возрастанія $\Phi_t(j)$ начиная съ $j=\pi$, будетъ множителемъ произведенія:

$$1.2.3 \ldots \Phi_t(i),$$

гдѣ

$$i=n-m.$$

Тогда

$$\lambda_n(p) \leq \lambda_n^{(1)}(p) + \lambda_n^{(2)}(p) + \lambda_n^{(3)}(p), \tag{86}$$

гдѣ $\lambda_n^{(1)}(p)$, $\lambda_n^{(2)}(p)$ имѣютъ тѣ же значенія, что въ неравенствѣ (83), а $\lambda_n^{(3)}(p)$ опредѣляется по формулѣ (84) замѣной n на $\Phi_t(i)$, поэтому

$$\lambda_n^{(3)}(p) < \frac{\Phi_t(i)}{p-1} \tag{87}$$

откуда на основаніи неравенства (86):

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^t} < \frac{\Phi_t(i)}{(p-1)n^t} + \frac{1}{n^{t-1}(p-1)} + \frac{\lambda_n^{(2)}(p)}{n^t}$$

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^t} < \frac{i^t}{n^t} \frac{M_t(t+1)}{p-1} + \frac{1}{n^{t-1}(p-1)} + \frac{\lambda_n^{(2)}(p)}{n^t}$$

$$\frac{\lambda_n(p)}{n^t} < \frac{M_t(t+1)+1}{p-1} + \lambda_n^{(2)}(p), \tag{88}$$

гдѣ M_t конечное число.

Отсюда слѣдуетъ конечность $\frac{\lambda_n(p)}{n^t}$ и потому и $\frac{\lambda_n(p)}{n^f}$, т. ė. выполненіе условія $L(f)$.

§ 15. Возьмемъ теперь случай разложенія болѣе общаго типа:

$$y = x^r[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots] \tag{54}$$

интеграла линейнаго уравненія

$$p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \ldots . p_{m-1}(x)y' + p_m(x)y = 0 \tag{8}$$

$$p_i(x) = x^{\rho_i} q_i(x). \tag{9}$$

На основаніи § 12 разложеніе

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots .$$

будетъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія:

$$\alpha_0(x, r)y_1^{(m)} + \alpha_1(x, r)y_1^{(m-1)} + \alpha_m(x, r)y = 0 \tag{89}$$

вслѣдствіе чего для a_{m+i} будемъ имѣть формулы (71) и (79), гдѣ цѣлые коэффиціенты замѣнены цѣлыми функціями отъ r, которыя приводятся къ виду:

$$a_{m+i} = \frac{H_{m+i}}{\overline{m+i}\,!\,c[N(\alpha_0)]^i} \tag{90}$$

$$a_{m+i} = \frac{H_{m+i}}{\overline{m+i}\,!\,c\prod\limits_{j=\pi}^{j=i} N[\Phi_i(j)]}, \tag{91}$$

гдѣ H_{m+i} цѣлая функція съ коэффиціентами цѣлыми R—функціями отъ u, опредѣляемаго уравненіемъ,

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \varepsilon_j(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)u^j = 0, \tag{92}$$

гдѣ ε_j цѣлыя R—функціи отъ $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$.

$N(f)$ обозначаетъ норму, т. е. произведеніе значеній f для различныхъ корней неприводимаго уравненія (64) опредѣляющаго r.

Изъ перваго выраженія (90) совершенно также, какъ изъ (71) выводимъ, что

$$\frac{p_n}{n} < 1.$$

Со вторымъ поступаемъ также, какъ съ (79) въ § 13, но только съ тою разницей, что уравненія (74) и (75) въ разсужденіяхъ слѣдуетъ замѣнить слѣдующими:

$$N[\Phi_i(i)] = 0 \tag{93}$$

$$\frac{\partial N[\Phi_i(i)]}{\partial i} = 0 \tag{94}$$

и i должны брать большимъ, чѣмъ наибольшій изъ корней этихъ уравненій.

Тогда легко убѣждаемся, что $\frac{p_n}{n^{f\chi}}$ и $\frac{\lambda_n(p)}{n^{f\chi}}$ при возрастаніи n должны оставаться конечными.

Мы показали въ § 10, что въ случаѣ ирраціональнаго $r-f=m$, въ этомъ случаѣ условія $P(f\chi)$ и $L(f\chi)$ сводятся къ $P(m\chi)$ и $L(m\chi)$.

Итакъ, замѣчая, что $\chi \leq m-h$ мы имѣемъ:

Разложеніе

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.)$$

интеграла линейнаго уравненія должно удовлетворять условію $A[m(m-h),\ m(m-h)]$.

Сохраняя обозначеніе §§ 8, 9 для общаго случая дифференціальныхъ уравненій, который послужитъ темой другой нашей статьи, для частнаго случая линейнаго уравненія будемъ употреблять нѣсколько видоизмѣненное, но какъ это будетъ явствовать изъ дальнѣйшихъ изслѣдованій болѣе удобное выраженіе

$$A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}.$$

§ 16. Теперь мы разсмотримъ разложенія самаго общаго типа регулярнаго интеграла линейнаго уравненія:

$$y=x^r\sum_{j=0}^{j=\alpha-1} A_j(x)[\log x]^{\alpha-j-1}, \tag{95}$$

$$A_j(x)=a_{0j}+a_{1j}x+a_{2j}x^2+\ldots., \tag{96}$$

гдѣ α обозначаетъ число группы корней уравненія:

$$S_h(0)r(r-1)\ldots[r-(m-h)+1]+S_{h+1}(0)r(r-1)\ldots$$
$$\ldots[r-(m-h)+2]+\ldots.S_h(0)=0, \tag{55}$$

гдѣ

$$S_{h+i}(x)=x^{\rho_{h+i}+\rho_h-i}\,p_{h+i}(x), \tag{56}$$

предполагая при этомъ, что къ одной группѣ мы относимъ всѣ корни, разности между которыми выражаются цѣлыми числами, при чемъ уравненіе (8):

$$p_0(x)y^{(m)}+p_1(x)y^{(m-1)}+\ldots.p_{m-1}(x)y'+p_m(x)y=0 \tag{8}$$

на ряду съ интеграломъ (95) еще имѣетъ простѣйшій регулярный интегралъ:

$$y^{(1)}=x^r A^{(1)}(x), \tag{97}$$

$$A^{(1)}(x)=a_0^{(1)}+a_1^{(1)}x+a_2^{(1)}x^2+\ldots. \tag{97$_1$}$$

Полагая

$$y=y^{(1)}\int y_1 dx, \tag{98$^{(1)}$}$$

уравненіе (8) преобразуемъ въ слѣдующее:

$$p_{0.1}(x)y_1^{(m-1)}+p_{1.1}(x)y_1^{(m-2)}+\ldots.p_{m-1.1}(x)y_1=0, \tag{8$^{(1)}$}$$

гдѣ

$$p_{j.1}=x^{\rho_{j1}}q_{j1}(x) \tag{9$^{(1)}$}$$

и гдѣ $q_{j1}(x)$ уже не цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами, а разложенія:

$$q_{j1}(x)=q_{0j1}+q_{1j1}x+q_{2j1}x^2+\ldots.$$

Коэффиціенты q_{sj1} будутъ удовлетворять тому же условію, что $A^{(1)}(x)$, т. е. условію $A\begin{bmatrix}m\\h\end{bmatrix}$, такъ какъ рядъ $q_{j1}(x)$ получается изъ $A^{(1)}(x)$ и $p_i(x)$ (удовлетворяющихъ $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, а потому $A\begin{bmatrix}m\\h\end{bmatrix}$) конечными аналитическими дѣйствіями) кромѣ дѣленія).

Какъ въ § 15 получаемъ для интеграла:

$$y_1^{(1)}=x^{r_1}A_1^{(1)}(x), \tag{97$_1^{(1)}$}$$

гдѣ r_1, какъ разность между корнями одной группы безъ единицы, число цѣлое отрицательное

$$A_1^{(1)}(x)=a_{01}^{(1)}+a_{11}^{(1)}x+a_{21}^{(1)}+\ldots, \tag{97$_1^{(1)}$}$$

слѣдующія выраженія для коэффиціентовъ $a_{n1}^{(1)}$

$$a^{(1)}_{n1}=\frac{H_n}{n!\,c[N(\alpha_{01}(0))]^{n-m}} \tag{98$_1^{(1)}$}$$

$$a^{(1)}_{n1}=\frac{H_n}{n!\,c\prod\limits_{j=\pi}^{j=i}\left\{N[\Phi_t(j)]\right\}}, \tag{99$_1^{(1)}$}$$

гдѣ N берется по отношенію къ различнымъ значеніямъ r, но только съ тою разницей, что H_n будутъ имѣть коэффиціентами уже не цѣлыя числа, а числа типа

$$\lambda_n=\frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

у которыхъ знаменатель обладаетъ свойствомъ $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}$, такъ какъ эти числа получаются сложеніемъ и умноженіемъ коэффиціентовъ $p_{j1}(x)$.

Приводя черезъ умноженіе на надлежащее цѣлое число коэффиціенты H_n къ цѣлымъ числамъ, т. е. H_n къ цѣлымъ R—функціямъ имѣемъ, обозначая черезъ d_n число удовлетворяющее условію $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}$, (т. е. наибольшій простой множитель и показатель степени любого множителя d_n въ конечномъ отношеніи къ $n^{m(m-h)}$) будемъ имѣть:

$$a^{(1)}_{n1}=\frac{H_n}{n!\,c[N(\beta_{01})]^i d_{n1}} \tag{100$_1^{(1)}$}$$

$$a^{(1)}_{n1}=\frac{H_n}{n!\,c\prod\limits_{j=\pi}^{j=i} N[\beta_{t1}(j)]d_{n1}} \tag{101$_1^{(1)}$}$$

β_{01}, β_{t1} числители α_{01} и Φ_{t1}.

Здѣсь важно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: $N[\beta_{01}]$ и $N[\beta_{t1}(j)]$ мы можемъ предполагать цѣлыми числами, а не цѣлыми R—функціями.

Въ самомъ дѣлѣ, въ нихъ могутъ входить только трансцендентныя ξ_i, входящія въ $p_{ji}(x)$ или въ $A^{(1)}(x)$. Но, если въ $A^{(1)}(x)$ входятъ трансцендентныя ξ_i, то тому же уравненію (8) можно удовлетворить замѣняя эти трансцендентныя какими угодно числами. Въ самомъ дѣлѣ условіями, чтобы $y^{(1)}$ былъ интеграломъ уравненія (8), будутъ алгебраическія соотношенія между коэффиціентами $p_i(x)$ и этими трансцендентными, которыя въ предположеніи ξ_i алгебраически независимыми, остаются въ силѣ и по замѣнѣ ξ_i какими угодно постоянными.

Если уравненію (8) *удовлетворяетъ интегралъ*:

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.)$$

съ трансцендентными коэффиціентами a_n, *то тому же уравненію удовлетворяетъ подобный же интегралъ*:

$$y=x^r(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots.)$$

съ алгебраическими коэффиціентами b_n.

Такъ какъ d_{n1} содержитъ только множители, входящіе въ знаменатели коэффиціентовъ $p_{ji}(x)$ или $A^{(1)}(x)$ (см. § 8) съ тѣмъ же условіемъ $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}$, то по исключеніи этихъ множителей изъ состава $c^{(1)}{}_{n1}$, мы получаемъ условія, которыя должны имѣть вообще для случая уравненія (8^1), коэффиціенты котораго въ области раціональностей опредѣляемой алгебраическимъ уравненіемъ степени $\overline{m-h}$ой, т. е. условія $A\begin{bmatrix} m-1 \\ h-1 \end{bmatrix}$.

Такимъ образомъ рядъ ($97_1{}^{(1)}$) удовлетворяетъ условіямъ

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0{}^{(1)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix}\right],$$

если рядъ (97_1) обозначать черезъ $A_0{}^{(1)}$.

Такимъ же образомъ, полагая

$$y_1=y_1{}^{(1)}\int y_2dx, \tag{$98^{(2)}$}$$

убѣждаемся, что разложеніе одного изъ интеграловъ:

$$y_2^{(1)} = x^{r_2} A_2^{(1)}(x) \tag{$97_1^{(2)}$}$$

$$A_2^{(1)}(x) = a^{(2)}_{01} + a^{(2)}_{11} x + a^{(2)}_{21} x^2 + \dots.$$

удовлетворяетъ условію

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} A_1^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-2 \\ h-2 \end{matrix}\right]$$

и наконецъ получимъ:

$$y = y_0^{(1)} \int y_1^{(1)} dx \int y_2^{(1)} dx \int \dots \int y^{(1)}_{\alpha-1} dx. \tag{102}$$

гдѣ

$$y_i^{(1)} = x^{r_i} A_i^{(1)}(x) \tag{$97_1^{(i)}$}$$

$$A_i^{(1)}(x) = a^{(i)}_{01} + a^{(i)}_{11} x + a^{(i)}_{21} x^2 + \dots,$$

r_i цѣлое отрицательное число, причемъ $A_1^{(i)}$ удовлетворяетъ условію

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} A_1^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-2 \\ h-2 \end{matrix} \dots A^{(1)}_{i-1} \middle| \begin{matrix} m-i \\ h-i \end{matrix}\right].$$

Такъ какъ

$$z_{\alpha-2} = y^{(1)}_{\alpha-2} \int y^{(1)}_{\alpha-1} dx = x^{r_{\alpha-2}} A^{(1)}_{\alpha-2}(x) \int x^{r_{\alpha-1}} A^{(1)}_{\alpha-1}(x) dx,$$

гдѣ

$$\int x^{r_{\alpha-1}} A^{(1)}_{\alpha-1}(x) dx = \int a_{\alpha-1} \frac{dx}{x} + \int \sum_{j=2}^{j=-r_{\alpha-2}} b_{-j}^{(\alpha-1)} x^{-j} dx +$$

$$+ \int \sum_{j=0}^{j=\infty} c_j^{(\alpha-1)} x^j dx$$

$a_{\alpha-1}$, $b_{-j}^{(\alpha-1)}$, $c_j^{(\alpha-1)}$ постоянныя, то производя элементарныя интегрированія имѣемъ

$$z_{\alpha-2} = x^{s_{\alpha-2}}[C^{(0)}{}_{\alpha-2}(x)\log x + C^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)], \qquad (103_{\alpha-2})$$

гдѣ $C^{(0)}{}_{\alpha-2}(x)$ и $C^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)$ голоморфные ряды, причемъ $C^{(0)}{}_{\alpha-2}(x)$ получается изъ $A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)$, а $C^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)$ изъ $A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)$ и $A^{(1)}{}_{\alpha-1}(x)$ конечными аналитическими дѣйствіями (кромѣ дѣленія), поэтому первый удовлетворяетъ условію (согласно § 9)

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \cdots A^{(1)}{}_{\alpha-3} \middle| \begin{matrix} m-\alpha+2 \\ h-\alpha+2 \end{matrix}\right],$$

второй

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \cdots A^{(1)}{}_{\alpha-2} \middle| \begin{matrix} m-\alpha+1 \\ h-\alpha+1 \end{matrix}\right],$$

первый содержитъ только множители $A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)$, второй

$$A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x) \text{ и } A^{(1)}{}_{\alpha-1}(x).$$

$$z_{\alpha-3} = y^{(1)}{}_{\alpha-3} \int z_{\alpha-2}\,dx =$$

$$= x^{r_{\alpha-3}} A^{(1)}{}_{\alpha-3}(x) \int \left[x^{s_{\alpha-2}} \left(C_1^{(0)}(x)\log x + C_1^{(1)}(x) \right) \right] dx,$$

откуда получаемъ съ помощью элементарнаго интегрированія:

$$z_{\alpha-3} = x^{s_{\alpha-3}}\left[C^{(0)}{}_{\alpha-3}(x)(\log x)^2 + C^{(1)}{}_{\alpha-3}(x)\log x + C^{(2)}{}_{\alpha-3}(x)\right], \quad (103_{\alpha-3})$$

гдѣ голоморфные ряды $C^{(0)}{}_{\alpha-3}(x)$, $C^{(1)}{}_{\alpha-3}(x)$, $C^{(2)}{}_{\alpha-3}(x)$ получаются конечными аналитическими дѣйствіями изъ $[A^{(1)}{}_{\alpha-3}(x)]$, $[A^{(1)}{}_{\alpha-3}(x), A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x)]$, $[A^{(1)}{}_{\alpha-3}(x), A^{(1)}{}_{\alpha-2}(x), A^{(1)}{}_{\alpha-1}(x)]$, поэтому содержащіе только множители $[(A^{(1)}{}_{\alpha-3})]$, $[(A^{(1)}{}_{\alpha-3}), (A^{(1)}{}_{\alpha-2})]$, $[(A^{(1)}{}_{\alpha-3}), (A^{(1)}{}_{\alpha-2}), (A^{(1)}{}_{\alpha-1})]$ и удовлетворяющіе условіямъ:

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \cdots A^{(1)}{}_{\alpha-4} \middle| \begin{matrix} m-\alpha+3 \\ h-\alpha+3 \end{matrix}\right]$$

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \dots A^{(1)}{}_{\alpha-3} \middle| \begin{matrix} m-\alpha+2 \\ h-\alpha+2 \end{matrix}\right]$$

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \dots A^{(1)}{}_{\alpha-2} \middle| \begin{matrix} m-\alpha+2 \\ h-\alpha+2 \end{matrix}\right].$$

Вообще

$$z_i = x^{s_i} \sum_{j=0}^{j=\alpha-i} C_i^{(j)}(x)(\log x)^{\alpha-i-j-1}, \qquad (103_i)$$

гдѣ

$$C_i^{(j)}(x)$$

получается конечными аналитическими дѣйствіями изъ

$$A_s^{(1)}(x) \qquad s=i,\ i+1,\ \dots\ i+j$$

всѣ множители $(C_i^{(j)})$ содержатся среди множителей

$$(A_s^{(1)}(x)) \qquad s=i,\ i+1,\ \dots\ i+j$$

и удовлетворяютъ условію

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \middle| \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \dots A^{(1)}{}_{i+j} \middle| \begin{matrix} m-i-j-1 \\ h-i-j-1 \end{matrix}\right].$$

Для доказательства предполагая, что если z_i имѣетъ такую форму, убѣждаемся, что тоже имѣетъ мѣсто и для z_{i-1}.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$z_{i-1} = y^{(1)}{}_{i-1} \int z_i dx$$

получается на основаніи уравненія (103_i) при помощи элементарныхъ интегрированій въ формѣ:

$$z_{i-1} = x^{s_{i-1}} \sum_{j=0}^{j=\alpha-i} C^{(j)}{}_{i-1}(x)(\log x)^{\alpha-i-j} \qquad (103_{i+1})$$

причемъ

$$C^{(j)}{}_{i-1}(x)$$

получается конечными аналитическими дѣйствіями (кромѣ дѣленія) изъ

$$A_{i-1}(x),\ C_i^{(s)}(x) \qquad s=0,\ 1,\ 2\ \ldots .\ j-1,$$

а множители $(C^{(j)}_{i-1})$ всѣ содержатся среди множителей (A_{i-1}) и $(C_i^{(s)})$.

Вслѣдствіе же сдѣланнаго предположенія относительно z_i*),

$$\underset{s=0,\ 1,\ 2\ \ldots .\ j-1}{C_i^{(s)}(x)} \qquad \text{можно замѣнить} \qquad \underset{s=i,\ i+1,\ i+2\ \ldots .\ i+j}{A_s^{(1)}(x)}$$

и мы получаемъ для

$$C^{(j)}_{i-1}(x)$$

условія

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \ldots . A^{(1)}_{i+j-1} \;\middle|\; \begin{matrix} m-i-j \\ h-i-j \end{matrix}\right].$$

Полагая $i=0$ имѣемъ

$$z_0=y_0^{(1)}\int y_1^{(1)}dx\ldots\int y^{(1)}_{\alpha-1}dx=x^r\sum_{j=0}^{j=\alpha-1} C^{(j)}(x)(\log x)^{\alpha-j}, \tag{103}$$

гдѣ $C^{(j)}(x)$ удовлетворяетъ условіямъ

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0^{(1)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \ldots . A_j^{(1)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-j-1 \\ h-j-1 \end{matrix}\right], \tag{104}$$

а всѣ множители $(C^{(j)})$ заключаются среди

$$(A_s^{(1)}) \qquad s=0,\ 1,\ 2\ \ldots .\ j.$$

Замѣтимъ теперь, что можно положить

$$A_0^{(1)}(x)=C^{(0)}(x)$$

$y_1^{(1)}$ можно взять равнымъ коэффиціенту при $(\log x)^{\alpha-2}$ въ выраженіи $y_1=\left(\frac{y}{y^{(1)}}\right)'$, т. е.

$$A_1^{(1)}(x)=C_1^{(0)}(x),$$

---

*) Согласно замѣчанію въ концѣ § 9.

который получается конечными аналитическими дѣйствіями надъ $C^{(0)}(x)$ и $C^{(1)}(x)$, а потому всѣ множители $(C_1^{(0)}(x))$ или $(A_1^{(1)})$ содержатся среди $(C^{(0)})$ и $(C^{(1)})$.

$y_2^{(1)}$ будетъ коэффиціентомъ при $(\log x)^{\alpha-3}$ въ $y_2=\left(\frac{y_1}{y_1^{(1)}}\right)'$,

$A_2^{(1)}(x)=C_2^{(0)}(x)$ и получается аналитическими дѣйствіями надъ $C^{(0)}(x)$, $C^{(1)}(x)$ и $(C^{(2)}(x))$ и т. д.

На этомъ основаніи въ силу замѣчанія, сдѣланнаго въ § 9, условіе (104) замѣняется слѣдующимъ:

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} C^{(0)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \;\ldots\ldots C_j^{(1)} \;\middle|\; \begin{matrix} m-j-1 \\ h-j-1 \end{matrix}\right] \tag{105}$$

Интегралъ

$$z_0=Y^{(1)}=\sum_{j=0}^{j=\alpha-1} c_j Y_j^{(1)},$$

гдѣ $Y_j^{(1)}$ различные интегралы Фуксовской группы, содержитъ α произвольныхъ постоянныхъ c_j.

Составляя другія группы интеграловъ, получаемъ для Фуксовскаго уравненія общій интегралъ, а для общаго случая выраженіе для наиболѣе общаго регулярнаго интеграла, такъ какъ по изслѣдованіямъ Томэ уравненіе (8) болѣе $\overline{m-h}$ независимыхъ регулярныхъ интеграловъ имѣть не можетъ.

$$y=\sum_i \sum_{j=0}^{j=\alpha_i-1} c_{ji} Y_j^{(i)},$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ группы интеграловъ.

Для нѣкотораго значенія произвольныхъ постоянныхъ:

$$x^r \sum_{j=0}^{j=\alpha-1} A_j(x)(\log x)^j = \sum_i \sum_{j=0}^{j=\alpha_i-1} c_{ji} Y_j^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=q} x^{r_i} \sum_{j=0}^{j=\alpha_i-1} C_i^{(j)}(x)(\log x)^{\alpha_i-j},$$

что на основаніи изслѣдованій Фукса *) предполагаетъ

$$\sum_{j=0}^{j=\alpha-1} A_j(x)(\log x)^{\alpha-j} = \sum_{j=0}^{j=\alpha-1} C^{(j)}(x)(\log x)^{\alpha-j} \; (*),$$

а это въ свою очередь

$$A_j(x) = C^{(j)}(x) \qquad j=0,\ 1,\ 2 \ldots . \overline{\alpha-1}$$

при нѣкоторыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ c_j.

Но согласно § 7 подобная замѣна не мѣняетъ условій, которымъ подчиняются множители $(C^{(j)})$.

Поэтому $A_j(x)$, какъ $C^{(j)}(x)$, подчиняются условіямъ

$$A \left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} \; A_0 \; \middle| \; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} \ldots . A_j \; \middle| \; \begin{matrix} m-j-1 \\ h-j-1 \end{matrix} \right]. \tag{106}$$

Итакъ *въ регулярномъ интегралѣ линейнаго уравненія* (8):

$$y = x^r \sum_{j=0}^{j=\alpha-1} (a_{0j} + a_{1j}x + a_{2j}x^2 + \ldots .)(\log x)^{\alpha-j-1} \tag{95}$$

коэффиціентъ при $(\log x)^{\alpha-1}$ *подчиняется условію* $A \left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} \right]$,

---

*) Который доказываетъ невозможность соотношеній этого типа иначе, **какъ въ формѣ (*).**

т. е. $\frac{p_n}{n^{m(m-h)}}$ *и* $\frac{\lambda_n(p)}{n^{m(m-h)}}$ *для него конечны, коэффиціентъ при* $(\log x)^{\alpha-2}$ *подчиняется тому же условію* $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}$, *по исключеніи же простыхъ множителей входящихъ въ знаменатели* a_{n0} *изъ знаменателей* a_{n1}, *рядъ будетъ подчиняться условію* $A\begin{bmatrix} m-1 \\ h-1 \end{bmatrix}$; *коэффиціентъ при* $(\log x)^{\alpha-3}$ *подчиняется условію* $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix}$, *по исключеніи множителей отвѣчающихъ коэффиціенту* $(\log x)^{\alpha-1}$ *условію* $A\begin{bmatrix} m-1 \\ h-1 \end{bmatrix}$, *а по исключеніи кромѣ того множителей, отвѣчающихъ коэффиціенту* $(\log x)^{\alpha-2}$, *условію* $A\begin{bmatrix} m-2 \\ h-2 \end{bmatrix}$ *и такъ далѣе. Однимъ словомъ для каждаго коэффиціента имѣютъ мѣсто условія, выражаемыя символомъ:*

$$A\left[\begin{matrix} m \\ h \end{matrix} A_0 \;\middle|\; \begin{matrix} m-1 \\ h-1 \end{matrix} A_1 \;\middle|\; \begin{matrix} m-2 \\ h-2 \end{matrix} \cdots A_j \;\middle|\; \begin{matrix} m-j-1 \\ h-j-1 \end{matrix}\right]. \tag{106}$$

§ 17. Теперь мы укажемъ рядъ возможныхъ обобщеній полученныхъ результатовъ.

Обобщеніе относительно формы коэффиціентовъ цѣлыхъ функцій $p_i(x)$ *представляющихъ коэффиціенты линейнаго уравненія (8).*

I. Первое обобщеніе.

Въ уравненіи (8) предполагаемъ $p_i(x)$ *цѣлыми функціями съ алгебраическими, но не всегда цѣлыми коэффиціентами.*

Уравненіе (8) тогда можно написать въ видѣ:

$$p_0(x, s)y^{(m)} + p_1(x, s)y^{(m-1)} + \dots p_{m-1}(x, s)y' + p_m(x, s)y = 0, \tag{107}$$

гдѣ s опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ степени σ, $p_i(x, s)$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ x и s.

Это уравненіе (107) въ свою очередь какъ и (8) приводится къ уравненію:

$$p_0^{(1)}(x,\ v)y_1^{(m)}+p_1(x,\ v)y_1^{(m-1)}+\ldots$$
$$\ldots . p^{(1)}_{m-1}(x,\ v)y'_1+p^{(1)}_m(x,\ v)y_1=0, \tag{108}$$

если $v=\alpha r+\beta s$, α, β цѣлыя числа, причемъ v опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ степени не выше $\sigma\chi$ или $\sigma(m-h)$.

Откуда получаемъ, что условіе $A[m(m-h),\ m(m-h)]$ должно замѣниться въ настоящемъ случаѣ условіемъ:

$$A[\sigma m(m-h),\ \sigma m(m-h)]. \tag{109}$$

II. Второе обобщеніе.

Въ уравненіи (8) *коэффиціенты цѣлыхъ функцій* $p_i(x)$ *трансцендентныя*, которыя всегда можно представить въ видѣ цѣлыхъ R—функцій въ виду того, что число трансцендентныхъ, за которыя можно принять часть коэффиціентовъ $p_i(x)$, число ограниченное.

Уравненіе (8) можно представить въ видѣ:

$$p_0(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ s)y^{(m)}+\ldots . p_{m-1}(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ s)y'+$$
$$+p_m(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ s)y=0. \tag{110}$$

гдѣ p_i цѣлыя раціональныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ η_i и s, опредѣляемаго уравненіемъ типа:

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \varepsilon_j(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu)s^j=0, \tag{111}$$

гдѣ ε_j цѣлыя R—функціи.

Уравненіе (108) въ этомъ случаѣ замѣняется слѣдующимъ уравненіемъ:

$$p_0^{(1)}(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ v)y_1^{(m)}+\ldots . p^{(1)}_{m-1}(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ v)y_1'+$$
$$+p_m(\eta_1,\ \eta_2\ldots\eta_\mu,\ v)y=0, \tag{112}$$

гдѣ $p_j^{(1)}$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ η_i, $v=\alpha r+\beta s$, опредѣляемаго уравненіемъ того же типа (111), какъ s, степени не выше $\sigma(m-h)$.

Здѣсь тоже можно повторить всѣ разсужденія §§ 13, 14, 15, 16, но при этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что $\Phi_t(j)$ будутъ уже не цѣлыми числами, а цѣлыми R—функціями.

Условіями возрастанія $\Phi_t(j)$, начиная съ $j=\pi$, будетъ требованіе, чтобы $j=\pi$ превосходило наибольшее изъ значеній i, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$N[\Phi_t(i)]=0 \tag{93}$$

$$\frac{\partial N[\Phi_t(i)]}{\partial i}=0 \tag{94}$$

или, что въ настоящемъ случаѣ то же, системѣ уравненій, получаемыхъ черезъ приравниваніе нулю въ $N[\Phi_t(i)]$ и $\frac{\partial N[\Phi_t(i)]}{\partial i}$ коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ:

$$\eta_1^{\beta_1}\ \eta_2^{\beta_2}\dots\eta_\mu^{\beta_\mu}.$$

Коэффиціенты въ $\Phi_t(j)$ будутъ тогда, начиная съ $j=\pi$ по численной величинѣ безконечно возрастать, откуда будемъ имѣть:

$$\Phi_t(\pi)<\Phi_t(\pi+1)<\dots<\Phi_t(i).$$

На основаніи свойствъ цѣлыхъ R—функцій, доказанныхъ въ § 4, простой R—множитель c_n знаменателя коэффиціента a_n въ разложеніи

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)$$

будетъ дѣлить одинъ изъ множителей, на которые разлагается $n!\,c[N(\alpha_0)]^n$ или $n!\,c\prod_{j=\pi}^{j=i}N[\Phi_t(j)]$ въ формулахъ (90) и (91).

Принимая, какъ выше, за A_λ въ опредѣленіи неравенствъ цѣлыхъ R—функцій свободный членъ, мы получимъ при достаточно большомъ n (или i) наибольшимъ множителемъ $N[\Phi_t(i)]$ въ формулѣ (91) и n въ формулѣ (90).

Отсюда сейчасъ же видимъ, что *если число простыхъ множителей въ знаменатель a_n безконечно, т. е. если рядъ a_0+a_1x+ $+a_2x^2+\ldots$ не принадлежитъ къ Эйзенштейновскому типу и если въ линейномъ дифференціальномъ уравненіи $p_0(0) \gtrless 0$, то наибольшій множитель въ знаменатель a_n долженъ быть числовымъ множителемъ,* такъ какъ всѣ R—множители $N(\alpha_0)$ конечны.

Замѣтимъ, что *дѣлитель p каждой R—функціи F меньше или равенъ этой R—функціи по численной величинѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ $|F|$ получается умноженіемъ степени цѣлой функціи съ цѣлыми положительными коэффиціентами $|p|$ на подобную же функцію $|q|$. Каждый коэффиціентъ $|F|$ будетъ цѣлой функціей съ цѣлыми положительными коэффиціентами отъ коффиціентовъ $|p|$. Взявъ коэффиціентъ A_i—F и соотвѣтствующій коэффиціентъ $|p|$ мы должны имѣть

$$k_0A_i(p)^s+k_1A_i(p)^{s-1}+\ldots k_{s-1}A_i(p)+k_s=A_i(F)$$

откуда

$$k_{s-1}A_i(p) \leq A_i(F)$$

$$A_i(p) \leq A_i(F).$$

Если для $i=\lambda$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$A_\lambda(p) < A_\lambda(F),$$

то по опредѣленію

$$|p| < |F|.$$

Если же

$$A_\lambda(p)=A_\lambda(F)$$

$$A_{\lambda-1}(p) < A_{\lambda-1}(F),$$

то опять

$$|p| < |F|.$$

Вообще при

$$A_j(p) = A_j(F) \qquad j=\lambda, \lambda-1, \lambda-2 \ldots . k+1$$

$$A_k(p) < A_k(F)$$

$$|\,p\,| < |\,F\,|\,, \text{ если } j=\lambda, \lambda-1, \lambda-2 \ldots 1,\ 0$$

то $|\,p\,| = |\,F\,|$.

Такимъ образомъ p_n во всякомъ случаѣ не больше одного изъ множителей произведеній $n\,!\,c[N(\alpha_0)]^n$ или $n\,!\,c\prod\limits_{j=\pi}^{j=i} N[\Phi_t(j)]$, который онъ дѣлитъ, а потому въ первомъ случаѣ не больше n, а во второмъ

$$\Phi_t(i).$$

Откуда $p \leq \Phi_t(i)$ и мы получаемъ опять условіе

$$P[\sigma m(m-h),\ \sigma m(m-h)].$$

Можно доказать также условіе

$$L[\sigma m(m-h),\ \sigma m(m-h)].$$

Для $p_0(0) \gtrless 0$ это не представляетъ затрудненія въ виду того, что p числовой множитель.

Въ общемъ случаѣ для этого только слѣдуетъ замѣтить, что, *если цѣлая R—функція F дѣлится нацѣло на R—функцію p, то цѣлыя числа* $F^{(0)}$, $p^{(0)}$, *получаемыя замѣной* ξ_i *цѣлыми числами, въ частности нулями, дѣлятся другъ на друга.*

Поэтому, если $p^{(0)}$ входитъ въ $c_n^{(0)}$ съ показателемъ $\lambda_n^{(0)}(p)$, то

$$\lambda_n(p) \leq \lambda_n^{(0)}(p).$$

Свободный отъ ξ_i членъ (т. е. $\Phi_t(j)_{\xi_i=0}$) будетъ цѣлой функціей степени t отъ $i-f(i)$, гдѣ π такъ выбрано, что для $i > \pi$ съ возрастаніемъ i (или n) $N[f_t(i)]$ свободный членъ $N[\Phi_t(i)]$, постоянно возрастаетъ.

Тогда для $i > \pi$

$$\prod_{j=\pi}^{j=i} N[\Phi_t(j)]_{\xi_i=0} = \prod_{j=\pi}^{j=i} N[f_t(j)]$$

представляетъ произведеніе возрастающихъ цѣлыхъ чиселъ, откуда заключаемъ о конечности $\frac{\lambda_n^{(0)}(p)}{n^t}$, а потому и $\frac{\lambda_n(p)}{n^t}$ и выводимъ условіе:

$$L[\sigma m(m-h),\ \sigma m(m-h)],$$

какъ при первомъ обобщеніи.

III. Третье обобщеніе.

Въ коэффиціенты цѣлыхъ функцій $p_i(x)$ могутъ также входить произвольно-постоянныя величины, отчего ходъ предыдущихъ разсужденій не мѣняется.

§ 18. *Обобщенія относительно коэффиціентовъ $p_i(x)$ при различныхъ производныхъ въ линейномъ дифференціальномъ уравненіи.*

IV. Четвертое обобщеніе.

Коэффиціенты линейнаго однороднаго уравненія (8) *не представляютъ цѣлыхъ функцій, но функціи алгебраическія*, т. е. мы имѣемъ линейное уравненіе

$$p_0(x, u)y^{(m)} + p_1(x, u)y^{(m-1)} + \ldots p_m(x, u)y = 0 \qquad (112)$$

$p_i(x, u)$ цѣлыя раціональныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ x и u, опредѣляемаго алгебраическимъ уравненіемъ:

$$f(x, u) = 0, \qquad (113)$$

степени ν.

Положимъ сперва, что въ $x=0$ *и однозначна*, такъ что

$$x^\mu u = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots, \qquad (114)$$

μ полож. цѣлое число или нуль, причемъ $x^\mu u$, какъ и u, опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ.

Теорема Эйзенштейна, формулированная подобно теоремамъ настоящей статьи въ обобщенномъ видѣ, даетъ для u_i выраженіе типа:

$$u_n = \frac{\sum_{j=0}^{j=\pi} u_n^{(j)} t^j}{v_n}, \tag{115}$$

гдѣ v_n, $u_n^{(j)}$ цѣлыя числа, t опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ степени не выше ν, причемъ множители (u_i) удовлетворяютъ условію $P(0)$ и $L(1)$, т. е. $A(0, 1)$.

При этомъ

$$p_i(x, u) = p_{0i} + p_{1i}x + p_{2i}x^2 + \ldots.$$

выражается голоморфнымъ рядомъ получаемымъ изъ ряда (114) конечными аналитическими дѣйствіями (кромѣ дѣленія и интегрированія), т. е. уравненіе (112), (113) приводится къ уравненію аналогичному уравненію $(8_1{}^{(1)})$, разсмотрѣнному въ § 16, коэффиціенты котораго удовлетворяли условію $A\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix} = A[m(m-h), m(m-h)]$.

Разница только въ томъ, что тамъ коэффиціенты разложеній $p_i(x)$ были раціональными числами, а здѣсь въ области раціональностей опредѣляемой t. Мы будемъ имѣть здѣсь тѣ же формулы $(98_1{}^{(1)})$, $(99_1{}^{(1)})$:

$$a_n = \frac{H_n}{n!\, c[N(\alpha_0(0))]^{n-m}} \tag{116}$$

$$a_n = \frac{H_n}{n!\, c \prod\limits_{j=\pi}^{j=i} \{N[\Phi_t(j)]\}} \tag{117}$$

и наконецъ

$$a_n = \frac{H_n}{n!\, c[N(\beta_0)]^i d_n} \tag{118}$$

$$a_n = \frac{H_n}{n\,!\,c \prod\limits_{j=\pi}^{j=i} N[\beta_t(j)]d_n}, \tag{119}$$

гдѣ N распространяется не на различныя значенія r, а значенія $v=\alpha t+br$ (α, β цѣлыя числа), опредѣляемаго уравненіемъ не выше $\nu(m-h)$-ой степени, $N(\beta_0)$, $N[\beta_t(j)]$ цѣлыя числа, d_n цѣлыя числа содержащія множителями только множители v_n и удовлетворяющія Эйзенштейновскому условію $A[0, 1]$.

Отсюда получаемъ *условія*

$$A[\nu m(m-h),\ \nu m(m-h)]. \tag{120}$$

Для случая, когда *u многозначно, т. е.*

$$x^{\frac{\mu}{d}} u = u_0 + u_1 x^{\frac{1}{d}} + u_2 x^{\frac{2}{d}} + \ldots. \tag{121}$$

гдѣ u_n выражается подъ видомъ (115), такъ какъ $t=x^{\frac{\mu}{d}}u$ алгебраическая функція отъ

$$z=x^{\frac{1}{d}}$$

причемъ t должно опредѣляться неприводимымъ уравненіемъ не выше $\frac{\nu}{d}$-ой степени (такъ какъ для $x=0$ имѣемъ не больше r значеній, выражаемымъ рядомъ (121)), разложеніе:

$$y = x^r[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.] \tag{54}$$

слѣдуетъ замѣнить слѣдующимъ:

$$y = x^r\left[a_0 + a_1 x^{\frac{1}{d}} + a_2 x^{\frac{2}{d}} + \ldots.\right]. \tag{122}$$

Полагая

$$x^{\frac{1}{d}}=x_1,$$

имѣемъ:

$$y=x^{rd}[a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots],$$

а уравненіе (112) приводится къ уравненію того же типа и полученный результатъ, относящійся къ условію

$$A(k,\ l)$$

обобщается и на этотъ случай замѣной въ условіи (120) ν на $\frac{\nu}{d}$, т. е. будемъ имѣть условіе:

$$A\left[\frac{\nu}{d}\,m(m-h),\ \frac{\nu}{d}\,m(m-h)\right].$$

Теперь не представляетъ никакой трудности убѣдиться и въ дальнѣйшихъ обобщеніяхъ:

V. Пятое обобщеніе.

Коэффиціенты $p_i(x,\ u)$ *и* $f(x,\ u)$ *алгебраически зависящіе отъ неприводимаго уравненія степени* σ. Имѣетъ мѣсто условіе:

$$A\left[\frac{\nu\sigma}{d}\,m(m-h),\ \frac{\nu\sigma}{d}\,m(m-h)\right]$$

причемъ результатъ этотъ обобщается на случай,

VI. Шестое обобщеніе.

Когда въ коэффиціенты $p_i(x,\ u)$, $f(x,\ u)$ *входятъ трансцендентныя или*

VII. Седьмое обобщеніе.

произвольныя постоянныя.

Наконецъ можно идти еще дальше и предполагать:

VIII. Восьмое обобщеніе.

Коэффиціенты $p_i(x)$ *линейнаго дифференціальнаго уравненія* (8) *вида* $x^r(p_{0i}+p_{1i}x^{\frac{1}{d_i}}+p_{2i}x^{\frac{2}{d_i}}+\ldots)$, *гдѣ* p_{ji} *всѣ принадлежатъ къ области раціональностей опредѣляемой уравненіемъ степени* σ, *удовлетворяютъ условіямъ* $A[k_i,\ l_i]$.

Тогда разложеніе интеграла:

$$y=x^r(a_0+a_1x^{\frac{1}{d}}+a_2x^{\frac{2}{d}}+\ldots),$$

гдѣ d наименьшее кратное $d_0,\ d_1 \ldots d_m$ удовлетворяетъ условію

$$A(k,\ l),$$

гдѣ k наибольшее изъ чиселъ

$$k_0,\ k_1,\ k_2 \ldots k_m,\ \sigma m(m-h),$$

l наибольшее изъ чиселъ

$$l_0,\ l_1,\ l_2 \ldots l_m,\ \sigma m(m-h).$$

Къ этому можно еще прибавить, что тотъ же рядъ удовлетворяетъ условію

$$A[k,\ l,\ p_0 \mid k',\ l',\ p_1 \mid k'',\ l'' \ldots p_m \mid \sigma m(m-h),\ \sigma m(m-h)],$$

если черезъ

$$k^{(i)},\ l^{(i)}$$

обозначить наибольшія изъ чиселъ:

$$k_i,\ k_{i+1} \ldots k_m,\ \sigma m(m-h)),\ (l_i,\ l_{i+1} \ldots l_m,\ \sigma m(m-h)).$$